Ф.А. БОСТАНОВА, З.М. ЛАЙПАНОВА,
З.К. ДЖАУБАЕВА, М.А. МАМЧУЕВ А.М.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Учебное пособие

КАРАЧАЕВСК
2019

УДК. 517 Печатается по решению редакционно-издательского совета
ББК 22.161 Карачаево-Черкесского государственного университета
имени У.Д. Алиева

Бостанова Ф.А., Лайпанова З.М., Джаубаева З.К., Мамчуев А.М. Математический анализ в задачах и упражнениях: учебное пособие / Бостанова Ф.А., Лайпанова З.М., Джаубаева З.К., Мамчуев А.М. Карачаевск: КЧГУ, 2016**.** – 136 с.

Рецензент:

Доктор физико-математических наук, профессор
М. Х. Уртенов
Доктор физико-математических наук, профессор
А.Б. Шабат

Пособие содержит необходимые теоретические сведения для решения практических задач на нахождение области определения функций, вычисление пределов последовательностей и функций, на исследование непрерывности функции в точке, а также дифференциальное исчисление функции одной переменной. Пособие является руководством для практических занятий по математическому анализу.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Функции действительного переменного.

1.1 Определение числовой функции.

Результаты измерения физических и геометрических величин выражаются положительными числами, а изменения этих величин - произвольными действительными числами. Поэтому физические и геометрические закономерности выражаются как зависимости между числами. Среди этих зависимостей наиболее важны для практики те, в которых по заданному значению одной величины можно однозначно определить значение другой. Например, зная длину стороны квадрата *x,* находим его площадь по формуле $S = x^2$, а зная промежуток времени t, протекший с начала падения камня в пустоте, по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$ находим пройденный им путь.

Закономерности, при которых значение одной величины однозначно определяет значение другой величины, описывают с помощью числовых функций, т. е. отображений из R в R (иначе говоря, отображений числовых множеств в $\boldsymbol{R}$**).** Итак, введем следующее определение:

Определение. Пусть X — числовое множество. Отображение f: $X \to \boldsymbol{R}$**,** сопоставляющее каждому числу $x \in X$ (аргументу) число y $\in$ $\boldsymbol{R}$**,** называют *числовой функцией,* заданной на X.

Если f: $X \to R$ — числовая функция и $a \in X$, то образ a обозначают $f(a)$ и называют *значением функции* f в точке a.

1.2. Область определения (существования) функции

Как и для любых отображений, для числовой функции можно ввести такие понятия, как: множество значений, обратимость, композиция и т. д. *Множеством значений числовой функции* f, заданной на X, называют числовое множество $f(X)$, где

$$f(X) = \{y : y = f(x) : x \in X\}$$

Пример 1. Пусть функция f ставит в соответствие каждому числу x его квадрат x^2 (пишут f: $x \to x^2$). Тогда множеством ее значений будет множество неотрицательных чисел.

Из данного выше определения вытекает, что для задания числовой функции f надо указать числовое множество X и закон, по которому каждому числу $x \in X$ сопоставляется число $f(x)$.

Областью определения функции называется совокупность всех точек числовой оси, в которых она имеет определенные действительные значения.

Очевидно, для многих функций областью определения будет не вся числовая ось, а только некоторая ее часть. Так, для функции $y = \sqrt{x}$ областью определения является полуоткрытый интервал $0 \le x < +\infty$; для функции $z = \dfrac{1}{x-1}$ область определения состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Основные элементарные функции имеют следующие области определения:

степенная функция $y = x^n$ с рациональным положительным показателем $n = \dfrac{\alpha}{\beta}$ при нечетном β определена на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, а при четном β определена в интервале $0 \le x < +\infty$;

показательная функция $y = a^x$, $a > 0$ определена на всей числовой оси;

логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$ определена в интервале $0 < x < +\infty$;

тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ определены на всей числовой оси; $y==tg\ x$, $y=\sec x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; *y=ctgx, y=cosecx* определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k = k\pi$;

обратные тригонометрические функции y=arcsin x, y=arccos x определены на отрезке $-1 \le x \le 1$; *y=arctg x, y=arcctg x* определены на всей числовой оси.

При нахождении области определения элементарной функции, заданной формулой *y=f(x),* нужно обращать внимание на следующие элементы формулы:

1) на радикалы четной степени - функция будет определена только для тех значений *x*, при которых их подкоренные выражения будут неотрицательны;

2) на знаменатели дробных выражений - функция будет определена только для тех значений *x,* при которых знаменатели отличны от нуля;

3) на трансцендентные функции log *v*, tg *v*, ctg *v*, sec *v*, cosec *v*, *arcsin v*, *arccos v*, которые определены не всюду, а только при указанных выше значениях своего аргумента *v*.

Если эти перечисленные элементы отсутствуют в формуле *y=f(x),* то областью определения функции *y* будет вся числовая ось (исключая те случаи, когда область определения функции ограничивается специальными условиями задачи).

Пример 2. Найти область определения каждой из следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; б) $u = \dfrac{3x-1}{2x^2+5x+2} + \sqrt[3]{6x+1}$;

в) $y = \arcsin\dfrac{1-x}{2}$; г) $v = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$;

д) $p = \log_2(x^2 - 4)$; е) $y = \dfrac{\lg x}{\arcsin(x-3)} + \sqrt[4]{3}\sin\dfrac{x}{2}$;

ж) $y=\sqrt{2^x-3^x}$; з) $y=\sqrt[4]{2^{\frac{x-1}{x+4}}-32}$;

и) $y=\sqrt{1-2x}+3\arccos\frac{3x-1}{2}$; к) $u=\frac{1}{\sqrt{-3+\log_5(x+2)}}$;

л) $v=\lg x-\frac{7}{\sqrt{x+1}}$; м) $y=\ln\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+5}$;

н) $y=\arccos\frac{2}{2+\sin x}$; о) $y=\sqrt{\sin x-1}$.

Р е ш е н и е. а) Поскольку аргумент x содержится под радикалом четной степени, то функция y будет иметь вещественные значения только при тех значениях x, при которых подкоренное выражение будет неотрицательно, т. е. $x^2-3x+2\geq 0$. Решая это неравенство, получим

$$(x-1)(x-2)\geq 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

Следовательно, область определения функции y есть интервал $[2;+\infty)$.

б) Здесь аргумент x содержится в знаменателе дроби. Поэтому x не может иметь тех значений, которые обращают знаменатель в нуль, так как деление на нуль не имеет смысла. Приравняв знаменатель нулю, найдем эти значения x:

$$2x^2+5x+2=0.$$

Решая квадратное уравнение, получим $x_1=-2$; $x_2=-\frac{1}{2}$.

Второе слагаемое в выражении функции u не накладывает никаких ограничений на значения x, поскольку показатель радикала нечетный. Следовательно, областью определения функции u является вся числовая ось, кроме точек $x_1 = -2;\ u\ \ x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

в) Функция y будет определена только для тех значений x, для которых $-1 \le \frac{1-x}{2} \le 1$. Решив эти неравенства, получим

$$-2 \le 1 - x \le 2 \quad \Rightarrow \quad -2-1 \le -x \le 2-1$$

$$\Rightarrow \quad -3 \le -x \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le x \le 3$$

Отрезок $[-1;3]$ и является областью определения функции y.

г) Найдем значения x, которые обращают знаменатель функции v в нуль: $\sin x=0;\ x_k = k\pi;\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

При этих значениях x функция v не имеет никаких значений. Областью определения функции v является вся числовая ось, кроме точек x_k.

д) Логарифмическая функция p определена только для положительных значений своего аргумента (логарифмируемого выражения), поэтому $x^2 - 4 > 0$.

Решая это неравенство, получим $|x| > 4$, откуда следует, что $-\infty < x < -2$ и $2 < x < +\infty$, т. е. область определения функции p состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty; -2;)$ и $(2;\ +\infty)$.

е) С учетом того, что в данной функции логарифм существует, если выражение под знаком логарифма положительно, знаменатель дроби отличен от нуля, а также учитывая область определения синуса и арксинуса. Область определения данной функции найдем из системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \arcsin(x-3) \ne 0, \\ -1 \le x - 3 \le 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 0, \\ 2 \le x \le 4, \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} x \neq 3, \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$.

Ответ: $x \in [2;3) \cup (3;4]$.

ж) Учитывая область определения показательной функции, что корень квадратный существует, если подкоренное выражение неотрицательно, получим: $2^x - 3^x \geq 0$; откуда $2^x \geq 3^x$. Разделим обе части неравенства на $3^x > 0$. Получим

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq 1 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0, \ \textit{т.к.} \ 0 < \frac{2}{3} < 1.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0]$.

з) Здесь корень четной степени, следовательно, имеем:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-1}{x+4}} - 32 \geq 0, \\ x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x-1}{x+4}} \geq 32, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x-1}{x+4}} \geq 2^5, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+4} \geq 5, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+4} - 5 \geq 0, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1-5x-20}{x+4} \geq 0, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-4x-21}{x+4} \geq 0, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x+21)(x+4) \leq 0, \\ x \neq -4 \end{cases}$$

Далее, решаем методом интервалов неравенство, получим

Рис.1

Ответ: $x \in [-5{,}25; -4)$.

и) Первое слагаемое данной функции принимает действительные значения при $1-2x \geq 0$. Второе слагаемое – при

$-1 \le \dfrac{3x-1}{2} \le 1$. Таким образом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-2x \ge 0 \\ \dfrac{3x-1}{2} \le 1 \\ \dfrac{3x-1}{2} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x \le 1 \\ x \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$$

Ответ: $x \in [-1/3;\ 1/2]$.

к) Учитывая, что в знаменателе данной функции имеется корень четной степени, получим:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ -3+\log_5(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ \log_5(x+2)>3 \end{cases} \Leftrightarrow .$$

$$\begin{cases} x>-2 \\ x>123 \end{cases} \Leftrightarrow x>123$$

Ответ: $x \in (123; +\infty)$.

л) Имеем:

$$\begin{cases} 2x \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z \\ x>-1 \end{cases}$$

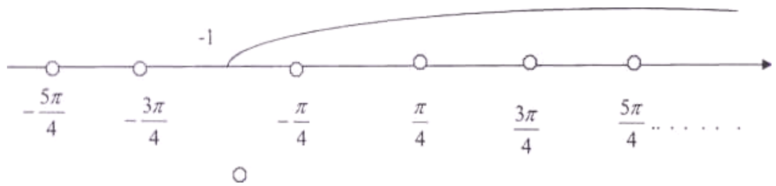


Рис.2

Ответ: $-1<x<-\dfrac{\pi}{4},\quad -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}<x<-\dfrac{\pi}{4},+\dfrac{\pi n}{2},\quad n=0,1,2,\ldots$

м) Функция имеет действительные значения в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком логарифма, будет иметь положительные значения, т.е.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+5}>0 \cdot$$

Решаем неравенство:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+5}>0 \quad \frac{(x-2)(x-3)}{x^2+2x+5}>0 \cdot$$

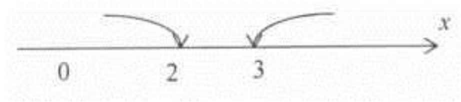


Рис.3

Знаменатель дроби положителен при любом действительном значении *x*, так как $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Числитель будет положительным или для $x>3$, или для $x<2$ (см. рис.3).

Ответ: $x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

н) Функция существует в тех точках, в которых

$$-1\le\frac{2}{2+\sin x}\le 1 \cdot$$

Так как дробь может принимать только положительные значения ($-1\le 2+\sin x\le 1$), то функция будет существовать в тех точках, в которых

$$0<\frac{2}{2+\sin x}\le 1, \quad 2\le 2+\sin x, \quad \sin x\ge 0.$$

Таким образом, функция существует в точках $x+2\pi k$, где *k* любое целое число и *x* любое, удовлетворяющее условию $0\le x\le\pi$ (см. рис. 4).

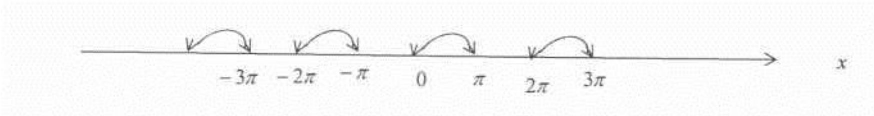


Рис.4

о) Функция существует в тех точках, в которых

$\sin x - 1 \geq 0, \quad \sin x \geq 1,$

т.е. в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Вычертим множество этих точек на оси OX (рис.5).

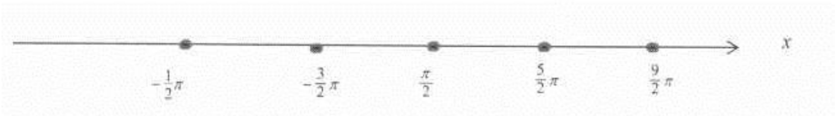


Рис.5

З а д а н и е 1. Найти области определения функций и построить их на числовой оси:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

3) $y = \sqrt[4]{x^3 - 9x}$;

4) $y = \dfrac{3x-5}{x^2-9}$; 5) $y = \sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{5-x}$;

6) $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}$; 7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{8-x}-1} + \sin 3x$;

8) $y = \log_3(x-3) + \arcsin\dfrac{x}{2}$; 9) $y = tgx + ctgx$;

10) $y = \dfrac{x+1}{2\sin^2 x - 1}$; 11) $y = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{x}$;

12) $y = \dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$; 13) $y = \dfrac{1}{1-\sqrt{x^2}}$;

14) $y=\sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+5}}$;

15) $y=\arccos 2x+2\sqrt{x^2+3x}$;

16) $y=\log_3\log_{\frac{1}{3}}x$;

17) $y=\sqrt{\frac{x}{2-x}}-\sqrt{\sin x}$;

18) $y=tg\,\frac{x}{x^2+1}$;

19) $y=arctg(x^2+1)$;

20) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}+\cos x}$.

1.3 Способы задания функций

Существует несколько способов задания функции.

а) *Аналитический способ* - это способ задания функции формулами, математическими символами, которые представляют собой удобную запись известных нам математических операций: сложение, вычитание, деление, отыскание тригонометрических функций, возведение в степень и т.д. Этот способ наиболее часто встречается на практике.

Не следует смешивать функцию с ее аналитическим выражением. Например, одна функция

$$y=\begin{cases}-x, & \textit{если}\quad x<0\\ x^2, & \textit{если}\quad 0\le x<1\\ x+1, & \textit{если}\quad x\ge 1\end{cases}$$

имеет три аналитических выражения: - x (при x<0), x^2 (при $0\le x<1$) и x+1 (при $x\ge 1$).

Часты случаи, когда невозможно найти аналитическое выражение для функции.

На практике, когда зависимости между функциями определяются опытным путем, распространены табличный и графический способы задания функций.

б) *Табличный способ* состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей знания аргумента х и соответствующие значения функции /(*), например таблица логарифмов. Этот способ применяется и в тех случаях, когда непосредственное вычисление значения функции по ее аналитическому выражению требует большой затраты времени

в) *Графический способ* состоит в изображении графика функции. Этот способ нашел широкое применение в различных самопишущих технических приборах.

г) *Словесный способ* состоит в том, что функция описывается правилом ее составления, например, функция Дирихле: /(х) = 1, если х- рационально; $f(x) = 0$, если x- иррационально.

1.4 Композиция числовых функций.

Введем понятие композиции числовых функций.

<u>Определение.</u> Пусть числовая функция f задана на множестве X, а функция g—на множестве Y, и пусть $f(X) \subset Y$. Тогда существует отображение $g \circ f$ множества X в $\boldsymbol{R}$, задаваемое формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Это отображение является числовой функцией, заданной на множестве X, которую называют *композицией функций* f и g.

Для математического анализа наиболее существенным является случай, когда функции f и g заданы своими выражениями. В этом случае выражение функции $g \circ f$ получается следующим образом: в выражении функции g каждое вхождение буквы x заменяется выражением $f(x)$.

Пример 2. Найдем выражение для композиций $g \circ f$ и $f \circ g$, где $f(x) = x^3 + 1,\quad g(x) = \sqrt{x+3} - x$.

Р е ш е н и е. Заменяя в выражении $\sqrt{x+3} - x$ каждое вхождение буквы x на $x^3 + 1,$ получаем выражение

$\sqrt{x^3+4}-(x^3+1)$ для функции $g \circ f$. Таким же образом получаем выражение $(\sqrt{x+3}-x)^3+1$ для функции $f \circ g$.

Пример 3. Составим композицию функций $h \circ f \circ g$, если

а) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=\sqrt[3]{x}-1$;

б) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $h(x)=tg\, x$.

Р е ш е н и е. а) Заменяя в выражении $\sqrt[3]{x}-1$ букву x на $\sin x$, а в выражении $\sin x$ заменяем букву x на x^2, получим $h \circ f \circ g = \sqrt[3]{\sin x^2}-1$.

б) Аналогично, заменяя в выражении $tg\, x$ каждое вхождение буквы x на $\dfrac{x+1}{x-1}$, а в выражении $\dfrac{x+1}{x-1}$ заменяя $tg\, x$ каждое вхождение буквы x на $\sin x$, получим

$$h \circ f \circ g = tg\frac{\sin x+1}{\sin x-1}.$$

Может случиться, что множество значений выражения, задающего функцию f, не является подмножеством области определения Y функции g. Тогда выражение, полученное подстановкой выражения для f в выражение для g, определяет функцию $g \circ f$ лишь для x, при которых $f(x) \in Y$.

Над функциями можно определить следующие арифметические операции.

<u>Определение.</u> Пусть функции f и g заданы на множестве $X \subset$ R. Их *суммой* $f+g$ называют функцию, значение которой для каждого $x \in X$ равно сумме значений функций f и g для этого значения x:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

Произведением функций f и g называют такую функцию $f \cdot g$ на X, что

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

Если функция g задана на множестве X и не обращается на нем в нуль, то через $\frac{1}{g}$ обозначают такую функцию на X, что

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)}.$$

Функцию $f\cdot\frac{1}{g}$ называют частным функций f и g и обозначают $\frac{f}{g}$. Таким образом $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пример 4. Пусть функция f ставит в соответствие каждому числу x из отрезка [-8; 9] число $3x^2+2$, а функция g ставит в соответствие каждому числу x из отрезка [-3; 5] число x^3. Найдем сумму этих функций.

Р е ш е н и е. Имеем [-8; 9] $\cap$ [-3; 5]=[-3; 9]. Функция $f+g$ ставит в соответствие каждому числу $x\in$[-3; 9] число $3x^2+2+x^3$.

З а д а н и е 2. Найдите сумму, разность, произведение, частное данных функций и составьте композицию функций $g\circ f$ и $f\circ g$.

а) $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^3$; б) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$;

в) $f(x)=x^2+5x+2$, $g(x)=tg\,2x$;

г) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt[3]{x}-1$; д) $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$;

е) $f(x)=\lg x$, $g(x)=10^x$; ж) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$;

з) $f(x)=x^2+1$, $g(x)=(x+1)^2$;

и) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{|x-2|}{x+1}$;

к) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sin x}$, $g(x) = x^2 + 1$.

II. Предел последовательности

Функции, заданные на множеств N натуральных чисел, называют последовательностями, то есть последовательность считается заданной, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число $f(n)$. Это число называют n-ым членом последовательности. Обычно вместо $f(n)$ пишут a_n, а последовательность обозначают так: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ или $\{a_n\}$.

Поскольку последовательности являются функциями на множестве N, для них определены понятия ограниченности, неограниченности, монотонности.

Последовательности чаще всего задаются с помощью выражения a_n через n. Например, $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n!}$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n,\ при\ n > 1,\quad 0! = 1$).

Зная выражение для общего члена a_n, можно найти любой член последовательности. Для этого в общий член последовательности вместо n, необходимо подставить натуральные числа. Например, для последовательности $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$ имеем:

$$a_1 = \frac{1^2}{1^3+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2^2}{2^3+1} = \frac{4}{9} \text{ и т.д.}$$

Важно также уметь проводить обратную операцию – нахождение выражения n –го члена последовательности по нескольким первым членам этой последовательности. Эта задача не всегда имеет однозначное решение. Например, для задания последовательности 1, 2, 4, 8, 16, 32, … наряду с выражением $a_n = 2^{n-1}$ подходит выражение

$$a_n = n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Пример 5. Написать первые десять членов последовательности

$$a_n = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}.$$

Р е ш е н и е. Для того, чтобы получить первый член последовательности, нужно в общем члене положить n=1. Получим:

$$a_1 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 1}{2}}{1} = 1.$$

Аналогично получаем остальные члены

$$a_2 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 2}{2}}{2} = 0; \qquad a_3 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 3}{2}}{3} = -\frac{1}{3}; \qquad a_4 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 4}{2}}{4} = 0;$$

$$a_5 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 5}{2}}{5} = \frac{1}{5}; \qquad a_6 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 6}{2}}{6} = 0; \qquad a_7 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 7}{2}}{7} = -\frac{1}{7};$$

$$a_8 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 8}{2}}{8} = 0; \qquad a_9 = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 9}{2}}{9} = \frac{1}{5}; \qquad a_{10} = \frac{\sin\frac{\pi\cdot 10}{2}}{10} = 0.$$

Пример 6. По данным первым членам последовательности

$$\frac{2}{6};\quad \frac{9}{10};\quad \frac{28}{`4};\quad \frac{65}{18};\quad \frac{126}{22};....$$

написать общий член.

Р е ш е н и е. Вообще говоря, формула для общего члена последовательности не определяется заданием нескольких членов последовательности. Все же можно искать формулу, наиболее простую и согласующуюся с заданными числами последовательности. Обратим внимание, что числитель каждого числа равен кубу номера этого члена плюс единица, т.е. n^3+1. Знаменатель является функцией порядкового номера члена. Внимательно исследовав обнаруживаем, что каждый знаменатель на две единицы больше учетверенного номера члена последовательности, т.е. знаменатель составляется по формуле $4n+2$. В итоге получим формулу для общего члена:

$$a_n = \frac{n^3+1}{4n+2}.$$

З а д а н и е 3. 1. Зная общий член последовательности, написать десять первых членов для каждой из последовательностей:

а) $a_n = \dfrac{n}{4n-3}$; б) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$; в) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$;

г) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n}$; д) $a_n = \dfrac{n\cdot\cos(\frac{\pi}{3}+\pi n)}{n+1}$;

е) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; ж) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$;

з) $a_n = \dfrac{n+1}{(n+2)(n+4)}$; и) $a_n = \sin(\frac{\pi}{6}+\pi n)+\cos(\frac{\pi}{3}+\pi n)$;

к) $a_n = \dfrac{n^2}{n}$; л) $a_n = 2^n$.

2. Написать формулу для общего члена последовательности по данным первым членам:

а) $\dfrac{1}{2};\quad \dfrac{1}{4};\quad \dfrac{1}{6};\quad \dfrac{1}{8};\quad \dfrac{1}{10};\ldots$

б) $\dfrac{1}{3\cdot 5};\quad \dfrac{1}{5\cdot 7};\quad \dfrac{1}{7\cdot 9};\quad \dfrac{1}{9\cdot 11};\quad \ldots$

в) $\frac{1}{6};\quad \frac{4}{11};\ \frac{71}{16};\ \frac{10}{21};\quad \frac{13}{26};\ \frac{16}{31}....$

г) $\frac{1}{5};\quad \frac{6}{7};\ \frac{11}{9};\ \frac{16}{11};\quad \frac{21}{13};\quad \frac{26}{15}....$

д) $\frac{1}{2};\quad \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\quad \frac{1}{32};\quad \frac{1}{64};....$

е) $\frac{1}{\sqrt{2}};\quad -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{4}};\ -\frac{1}{\sqrt{5}};\quad \frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{7}};\quad \frac{1}{\sqrt{8}};....$

ж) $\frac{1}{2};\quad \frac{3}{5};\ \frac{5}{10};\ \frac{7}{17};\quad \frac{9}{26};\ \frac{11}{\sqrt{37}};\quad \frac{13}{50};....$

з) 1, 3, 9, 27, 81, …

и) 2, 5, 10, 17, 26, …

л) $\sqrt{1\cdot 2};\ \sqrt{2\cdot 3};\quad \sqrt{3\cdot 4};\ \sqrt{4\cdot 5};\ \ ....$

k) $\frac{3}{2^2\cdot 3^2};\ -\frac{5}{3^2\cdot 4^2};\ \frac{7}{4^2\cdot 5^2};\ -\frac{9}{5^2\cdot 6^2};\ \ .....$

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, $n\in N$, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ найдется такой номер $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n>n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

В кванторной форме это определение записывают так:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0): |x_n-a|<\varepsilon.$$

Если последовательность $\{x_n\}$, $n\in N$, имеет предел, то она называется *сходящейся*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}$, $n\in N$ называют *бесконечно малой*.

Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ означает: $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0):\ |x_n| > M$. Последовательность $\{x_n\},\ \ n \in N$ в этом случае называется *бесконечно большой*.

Необходимое условие сходимости числовой последовательности: для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Пример 7. Доказать пользуясь определением предела последовательности, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+1} = 3$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1} = 1$.

Р е ш е н и е. а) Для того, чтобы доказать, что предел последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{n},\ \ x_n \in N$ равен единице, достаточно указать способ построения для любого $\varepsilon > 0$ числа $n_0(\varepsilon)$, входящего в определение предела. Зададим $\varepsilon > 0$ и составим неравенство

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon, \qquad (*)$$

которое эквивалентно неравенству $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, если в качестве числа $n_0(\varepsilon)$ выбрать число $[1/\varepsilon]+1$ (символом [z] обозначается целая часть z), то для всех $n > n_0(\varepsilon)$ будет выполнятся неравенство $(*)$. Таким образом, утверждение о том, что единица является пределом последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{n},\ \ x_n \in N$ доказано.

б) Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно определить соответствующее $n_0(\varepsilon)$ такое, что из $n > n_0(\varepsilon)$ будет следовать $|x_n - 3| < \varepsilon$.

Оценим сверху абсолютную величину разности:

$$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n - 3n - 3}{n+1}\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}.$$

Если n выбирать так, чтобы $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, т.е. $n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$ и $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, то тогда $\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$. В данном случае число $n_0(\varepsilon)$ можно взять равным целой части числа $\frac{3}{\varepsilon} - 1$. Это обозначают так: $n_0(\varepsilon) = E\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)$. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующее n_0 и отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

В частности: 1) если $\varepsilon = \frac{2}{3}$, то $n_0 = E\left(\frac{3}{2/3} - 1\right) = E(4{,}5 - 1) = 3$. Тогда, если члены последовательности имеют номера большие, чем 3, то $|x_n - 3| < \frac{2}{3}$;

2) если $\varepsilon = 0{,}16$, то $n_0 = E\left(\frac{3}{16/100} - 1\right) = E(\frac{75}{4} - 1) = E(\frac{71}{4}) = 17$. В этом случае для всех $n > 17$ будет $|x_n - 3| < 0{,}16$.

в) Оценим сверху абсолютную величину разности

$$|x_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+1}-1-\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{n^2+1}+1}\right|=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+1}$$

.

Если n выбирать так, чтобы $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+1}<\varepsilon$ (будем полагать $\varepsilon<1$), т.е.

$$\frac{2}{\varepsilon}<\sqrt{n^2+1}+1,\quad \frac{2}{\varepsilon}-1<\sqrt{n^2+1},\quad \sqrt{n^2+1}>\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right),$$

$$n^2>\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)^2-1,\quad n>\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)^2-1},$$

то тогда $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}-1\right|<\varepsilon$.

Итак, в данном случае $n_0=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)^2-1}\right)$

и для любого ε может быть найдено соответствующее $n_0(\varepsilon)$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

В частности: 1) если $\varepsilon=0{,}1$, то

$$n_0(\varepsilon)=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{0{,}1}-1\right)^2-1}\right)=E(\sqrt{19^2-1})=E(\sqrt{360})=18$$

и для всех $n>18$ будет $|x_n-1|<0{,}1$;

2) если $\varepsilon=0{,}001$, то $=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{0{,}001}-1\right)^2-1}\right)=E(\sqrt{199^2-1})=1998$ и для всех $n>1998$ будет $|x_n-1|<0{,}001$.

З а д а н и е 4. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{6n+2}=\dfrac{5}{6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n}=\dfrac{3}{2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-8}{6n+4}=\dfrac{5}{6}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=1$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{2^n}=1$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{1/2-n}=-6$; ж)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2n^2+3}=\dfrac{3}{2}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{7-9n}=-\dfrac{5}{9}$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}=0$.

III. Предел функции

Промежуток $(a-\delta, a+\delta)$ называют δ - окрестностью точки a числовой прямой (рис.1) и обозначают $U_{\delta(a)}$. Обычно a называют центром окрестности, а δ - ее радиусом.

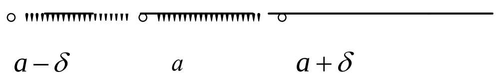


Рис.6

Поскольку $|x-a|$ означает расстояние между точками x и a координатной прямой, то неравенству $|x-a|<\delta$, где $\delta>0$ удовлетворяют только точки δ - окрестности точки а (см. рис.6), т.е. высказывания $|x-a|<\delta$ и $x\in U_{\delta(a)}$ равносильны. Например, неравенство $|x-3|<2$ означает множество точек числовой прямой $1<x<5$, т.е. окрестность точки 3 радиуса 2.

Прежде чем дать общее определение предела функции, рассмотрим примеры.

Пример 8. Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Рассмотрим таблицу значений этой функции вблизи точки $x = 3$.

x	2,94	2,96	3	3,02	3,04	3,06
$\dfrac{x^2-9}{x-3}$	5,94	5,96	функция не определена	6,02	6,04	6,06

При $x = 3$ функция не определена. Если же значения x выбрать достаточно близкими к трём, то значения $f(x)$ оказываются, как видно из таблицы, достаточно близкими к 6. Докажем это строго математически, а именно: покажем, что для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно указать такую окрестность точки $x = 3$, что всюду внутри неё, за исключением самой точки, будет выполняться неравенство $|f(x)-6|<\varepsilon$.

Действительно, если $x \neq 3$, то $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$, поэтому $|f(x)-6|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$ при $3-\varepsilon<x<3+\varepsilon$. Таким образом, неравенство $|f(x)-6|<\varepsilon$ выполняется при всех $x\in(3-\varepsilon;\ 3+\varepsilon)$, кроме $x=3$.

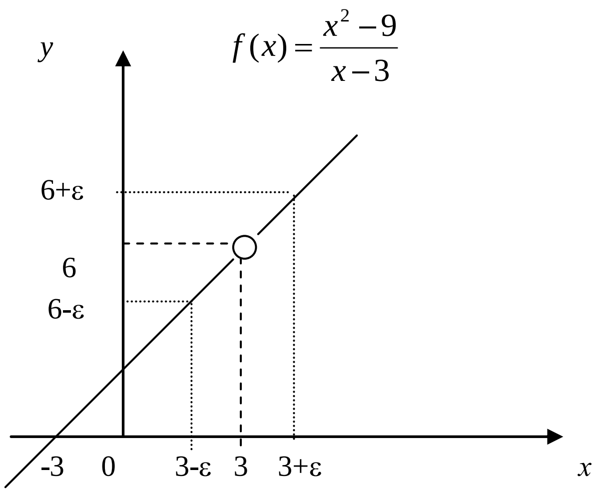


Рис. 7

Если, например, мы хотим, чтобы значения $f(x)$ отличались от 6 менее чем на $\varepsilon = 0{,}01$, то должны рассматривать $x \in (2{,}99;\ 3{,}01)$. Аналогично при $\varepsilon = 0{,}001$ получим интервал (2,999; 3,001) и т.д. Интервал $(3-\varepsilon;\ 3+\varepsilon)$ можно построить геометрически (рис. 7).

Итак, если значения аргумента x выбрать *достаточно близкими* к 3, но не равными 3, то значения функции будут *сколь угодно мало* отличаться от 6. Несмотря на то что рассматриваемая функция не определена при $x = 3$, естественно считать, что её предел при $x \to 3$ (x стремящемся к 3) существует и равен 6:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6\,.$$

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 9. Пусть $f(x) = x^2$. Не рассуждая столь подробно, как в примере 4, отметим очевидный факт: чем ближе значения аргумента x к 2, тем ближе значения $f(x)$ к 4, то есть, тем меньше абсолютная величина разности x^2-4. Действительно, какое бы малое число $\varepsilon>0$ мы ни взяли, всегда можно указать такой интервал, содержащий точку $x=2$, что для всех для точек из этого интервала будет выполняться неравенство $\left|x^2-4\right|<\varepsilon$. На рис. 8 $\left|f(x)-4\right|=\left|x^2-4\right|<\varepsilon$ при всех

$$x\in(2-\delta_1;\ 2+\delta_2)\cdot$$

Так как $\delta_1>\delta_2$,

$$0\ <2-\delta_1<2<\ 2+\delta_2$$

то полагая $\delta=\delta_2$, можем утверждать, что если $\left|x-2\right|<\delta$, то $\left|f(x)-4\right|<\varepsilon$.

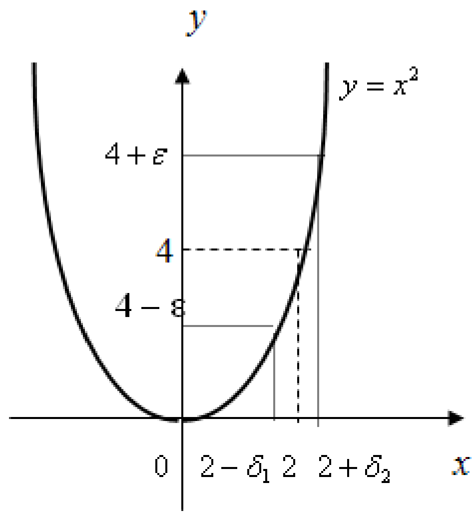


Рис. 8

Таким образом, так же, как и в примере 8, если значения x выбрать *достаточно близкими* к 2, то значения функции

$f(x)=x^2$ будут *как угодно мало отличаться* от 4, и число 4 естественно назвать пределом функции при x, стремящемся к 2:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Пусть (*a;b*) – некоторый промежуток числовой оси и $x_0 \in (a;b)$. Будем считать, что функция $y=f(x)$ определена во всех точках промежутка (*a;b*), за исключением, может быть точки x_0.

Определение. Число А называют пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$, найдется положительное число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $x\in(a;b)$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Другими словами, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся зависящее от ε $\delta>0$ такое, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, справедливо следующее: $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В кванторной форме это определение записывают так:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x: 0<|x-x_0|<\delta):\ |f(x)-A|<\varepsilon \text{ или}$$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x: x\in U_\delta(x_0))\ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

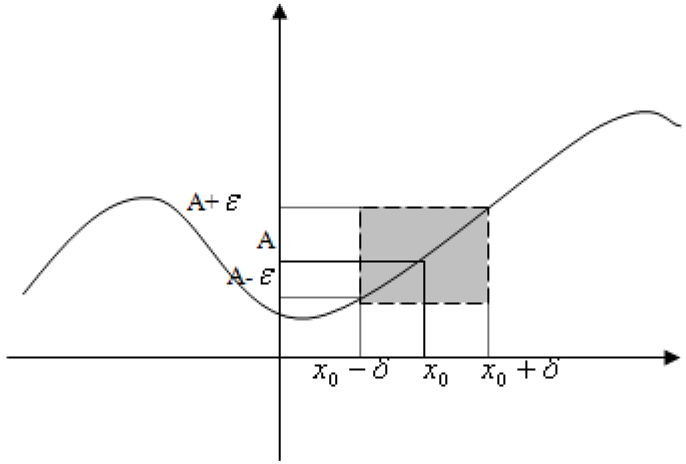


Рис.9

Например, покажем, что число 13 является пределом функции $f(x)=5x+3$ при $x\to 2$.

Решение. Покажем сначала, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти соответствующее δ. Составим абсолютную величину разности $|f(x)-A|=|(5x+3)-13|=|5x-10|=5|x-2|$.

Если взять $\delta\le\frac{\varepsilon}{5}$, то для всех значений x, удовлетворяющих условию $0<|x-2|<\delta$, будет

$$|(5x+3)-13|=5|x-2|<5\delta\le 5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(5x+3)=13$.

<u>Определение.</u> Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное

число B такое, что для всех $x > B$ (или $x < -B$) справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Заметим, что не для всякой функции $y = f(x)$ существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Например, при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ значения функции $y = tg\, x$ (рис. 10) или неограниченно растут при ($x < \dfrac{\pi}{2}$), или неограниченно убывают (при $x > \dfrac{\pi}{2}$).
Поэтому нельзя указать никакого числа b, к которому стремились бы значения $f(x)$ этой функции при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

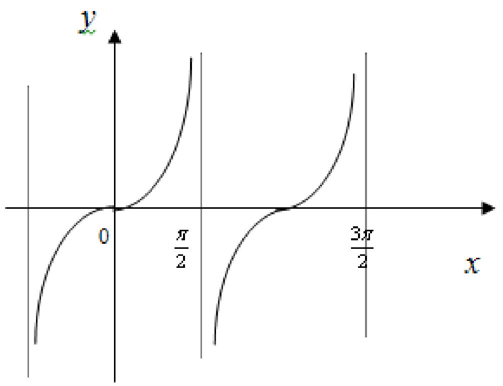


Рис. 10

Другой пример. Рассмотрим функцию, определённую следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

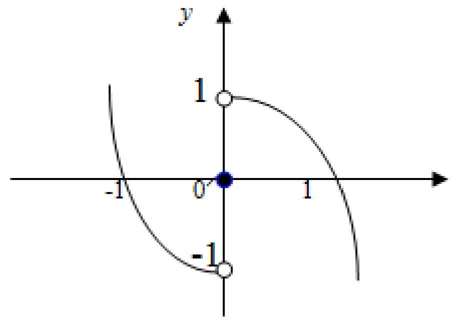


Рис. 11

График этой функции дан на рис. 11. Когда значения аргумента x стремятся к 0, оставаясь отрицательными, соответствующие значения функции $f(x)$ приближаются к (-1). Когда же значения аргумента x приближаются к 0, оставаясь положительными, соответствующие значения функции $f(x)$ стремятся к 1. При этом $f(0)=0$. Очевидно, что указать какое-либо число, к которому стремились бы все значения $f(x)$ при $x \to 0$, нельзя. Поэтому для данной функции $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует. Хотя предел этой функции в любой другой точке вычислить можно: к примеру, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x^2) = 0$ или $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(x^2-1) = 3$.

Точно так же нельзя указать такое число b, к которому бы стремились все значения функции $y=\sin x$ (рис. 12) при неограниченном возрастании $|x|$ (при $x \to \pm\infty$), так как величина $f(x)$ совершает гармонические колебания с постоянной амплитудой, всё время изменяясь от (-1) до (+1). Поэтому $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ не существует.

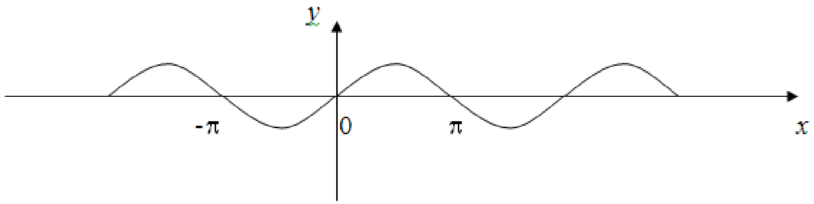


Рис. 12

Функция *f(x)* называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция *f(x)* называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,

то есть $(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta)\ |f(x)| > M$.

Пример 10. Исходя из определения предела, доказать, что $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём, при каких значениях *x* выполняется неравенство

$$|f(x) + 5| = \left| \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + 5 \right| < \varepsilon .$$

$$\left| \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + 5 \right| = \left| \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} \right| = |x + 2|$$

при всех $x \neq -2$.

Таким образом, если $|x + 2| < \varepsilon$ или $x \in (-2 - \varepsilon; -2 + \varepsilon)$, то $|f(x) + 5| < \varepsilon$, а это означает по определению, что $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$.

Пример 11. Исходя из определения предела, доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x+1}=2$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$.

$$\left|f(x)-2\right|=\left|\frac{2x+3}{x+1}-2\right|=\frac{1}{\left|x+1\right|}.$$

Отсюда следует, что если $\left|x+1\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ или $x>-1+\dfrac{1}{\varepsilon}$, то $\left|f(x)-2\right|<\varepsilon$. Таким образом, действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x-1}=2$ по определению.

2.1Основные правила вычисления пределов

1. Сумма конечного числа бесконечно малых есть также бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть также бесконечно малая.

3. Произведение бесконечно малых функций есть также бесконечно малая.

4. Сумма двух бесконечно больших функций одного и того же знака является бесконечно большой функцией того же знака.

5. Сумма бесконечно большой функции и ограниченной функции есть бесконечно большая функция.

6. Произведение бесконечно большой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, - бесконечно большая функция.

7. Произведение двух бесконечно больших функций - бесконечно большая функция.

8. **Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами:** если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x\to x_0$ ($x\to\infty$), то функция $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ явля-

ется бесконечно большой при $x \to x_0$ ($x \to \infty$). И обратно, если функция $f(x)$ есть бесконечно большая величина при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть величина бесконечно малая при $x \to x_0 (x \to \infty)$.

Если существуют $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$, то существуют пределы

$$\lim_{x \to a} c = c\ ,$$

$$\lim_{x \to a} cf_1(x) = c \lim_{x \to a} f_1(x),$$

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x), \qquad (*)$$

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \lim_{x \to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) / f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) / \lim_{x \to a} f_2(x) \qquad (\lim_{x \to a} f_2(x) \neq 0).$$

2.2 Методы вычисления пределов функций

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

1) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции при $x \to a$, которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, то есть

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

2) Если $x \to \infty$ или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Пример 12. Найти предел функции:

а) $f(x)=2x^4+3x^2-2$ при $x\to -2$;

б) $g(t)=(t+1)\sqrt{t^2-9}-\log_2(t+3)$ при $t\to 5$;

в) $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+4}$ при $x\to 4$;

г) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+3}$ при $x\to 1$;

д) $f(x)=\dfrac{7x+8}{1-x^2}$ при $x\to 1$.

Р е ш е н и е. Функция эта является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел ее как частное значение функции в предельной точке:

а) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=2(-2)^4+3(-2)^2-2=42$;

б) $\lim\limits_{t\to 5} g(t)=g(5)=(5+1)\sqrt{5^2-9}-\log_2(5+3)=21$.

в) Применяя теоремы (*), находим

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-2x}{x^2+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(3-2x)}{\lim\limits_{x\to 4}(x^2+4)}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}3-2\lim\limits_{x\to 4}x}{\lim\limits_{x\to 4}x^2+\lim\limits_{x\to 4}4}=\frac{3-2\cdot 4}{16+4}=\frac{-5}{20}=-\frac{1}{4}.$$

г) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}3}=0.$$

д) Так как $\lim\limits_{x\to -1}(1-x^2)=0$, то мы не можем воспользоваться теоремой частного пределов. Заметим, однако, что знаменатель данной дроби при $x\to -1$ не равен нулю, а стремится к нему, то есть неограниченно уменьшается по абсолютной величине, оставаясь отличным от нуля. При этом $\lim\limits_{x\to -1}(7x+8)=1$. Таким образом, чем ближе значение x к (-1), тем большей становится абсолютная величина дроби $\dfrac{7x+8}{1-x^2}$, поэтому $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x+8}{1-x^2}=\infty$.

Часто бывает так, что при подстановке предельного значения функции, получаются неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Функция $f(x)$ представляет собой отношение двух бесконечно малых при $x\to a$ или $x\to\infty$, то есть случай $\frac{0}{0}$. Рассмотрим примеры:

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$. При непосредственной подстановке $x=2$, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для того, чтобы избавиться от этой неопределенности, делаем преобразования, чтобы сократить дробь.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Здесь нет сокращения на нуль, что никогда недопустимо. По определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению 2, никогда с ним не совпадая. Поэтому здесь $x-2\neq 0$.

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$. Подстановка числа 5 вместо x приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, поэтому преобразуем дробь, разлагая числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{x+5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$.

Так как

$$\lim_{x\to5}(x^2-25)=\lim_{x\to5}(x^2-6x+5)=0,$$

то данный предел является неопределённостью вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

При $x\neq5$ данную дробь можно сократить:

$$\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x+5}{x-1}.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to5}\frac{x+5}{x-1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

4) Вычислить $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+3x^3-4x^2-6x-12}{x^3-2x^2+3x-6}$.

Если необходимо найти предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке $x=a$, то согласно теореме Безу оба многочлена делятся без остатка на $x-a$, то есть такую дробь всегда можно сократить на $x-a$.

В данном случае, при подстановке $x=2$ получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В числителе и знаменатели нашей дроби многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке $x=2$. Тогда согласно теореме Безу оба многочлена делятся без остатка на $x-2$. Получим:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4+3x^3-4x^2-6x-12}{x^3-2x^2+3x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x^3+5x^2+6x+6)(x-2)}{(x^2+3)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^3+5x^2+6x+6}{x^2+3}=\frac{2^4+5\cdot2^2+6\cdot2+6}{2^2+3}=\frac{64}{7}.$$

5) Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n – целые числа). Так как числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль при x=1, то

дробь можно сократить на x-1. Из курса элементарной алгебры известно, что

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + a^{m-4}b^3 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})$$

.

Пользуясь этой формулой, получим:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+x^{m-4}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}+\ldots+x+1)} = \frac{1+1+1+\ldots+1}{1+1+1+\ldots+1} = \frac{m}{n}$$

.6) Вычислить $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

Если функция, стоящая под знаком предела, имеет иррациональности и имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия необходимо умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное в данном случае знаменателя (так как иррациональность находится в знаменателе) , что позволит избавиться от иррациональности, а затем сократим дробь. Получим:

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2) = 4$$

.

6) Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

Этот предел, как и в примере 4, является неопределённостью вида $\frac{0}{0}$. Данную дробь нельзя сразу сократить на $(x-1)$. Поэтому предварительно преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель на ($\sqrt{3+x}+2$) - выражение, сопряжённое числителю. Получим

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{1}{4}.$$

7) Вычислить $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$.

Если иррациональность находится и в числителе, и в знаменателе, то для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженное выражение и числителя, и знаменателя.

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}=\lim_{x\to 9}\frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)(3+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{[9-(\sqrt{x})^2]\cdot(\sqrt{x-5}+2)}{[(\sqrt{x-5})^2-4]\cdot(3+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{(9-x)\cdot(\sqrt{x-5}+2)}{(x-5-4)\cdot(3+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 9}\frac{(9-x)\cdot(\sqrt{x-5}+2)}{(x-9)\cdot(3+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-(x-9)\cdot(\sqrt{x-5}+2)}{(x-9)\cdot(3+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-(\sqrt{x-5}+2)}{(3+\sqrt{x})}=-\frac{\sqrt{9-5}+2}{3+\sqrt{9}}=-\frac{2}{3}.$$

Вычисление пределов от выражений, содержащих иррациональности, иногда упрощается введением новых переменных.

8) Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$. Здесь в числителе и знаменателе стоит иррациональность разной степени. Предел числителя и знаменателя равен нулю. Если под знаком предела стоит иррациональная дробь и предел числителя и знаменателя равен нулю, то надо иррациональность перенести из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель (а иногда и то и другое), дробь сократить и перейти к пределу. В данном случае числитель дополним до суммы кубов, а для знаменателя умножим на сопряженное ему выражение. Тогда будем иметь:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt[3]{1+2x}+1\right)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left(\sqrt{2+x}+x\right)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(1+2x+1)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)\left(2+x-x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)(2-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{2+x}-x\right)}{\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)(2-x)}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{1}-x\right)}{\left(\sqrt[3]{(1-2)^2}-\sqrt[3]{-1}+1\right)(2+1)}=\frac{4}{9}.$$

Вычисление пределов от выражений, содержащих иррациональности, иногда упрощается введением новых переменных.

9) Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. Полагая $x=t^{12}$, где показатель степени равен наименьшему кратному показателей корней, получим при $x\to 1$, $t\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+1)}{(t^2+t+1)}=\frac{(1+1)(1+1)}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$

10) Вычислить $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$. Здесь разложим числитель как разность кубов, тогда имеем:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=$$

$$=(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4)=12\,.$$

Этот же предел можно вычислить иначе с помощью подстановки $x=t^3$. Когда $x\to 8$, то $t\to 2$. Поэтому

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t-2}=\lim_{t\to 2}(t^2+2t+4)=12\cdot$$

11) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x}$. В предельной точке получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы избавиться от нее, применяем формулы сокращенного умножения: разность кубов и разность квадратов.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{1-\cos^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1+\cos x)}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется *1-й замечательный предел*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (x \text{ - радианная мера угла}).$$

12) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$. Чтобы использовать 1-й замечательный предел разложим выражение следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1\,.$$

Таким образом, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ - следствие из 1-го замечательного предела.

13) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$. Умножим и разделим выражением на $2x\cdot 3x$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin 2x\cdot 3x}{2x\cdot\sin 3x\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

14) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}$.

Предел числителя и знаменателя равен нулю. Нужно преобразовать дробь так, чтобы решение свелось к отысканию известного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\quad\frac{x^2}{4}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{2}\cdot$$

Здесь учитываем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

15) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$,

Будем преобразовывать функцию так, чтобы дело свести к первому замечательному пределу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin(a+2x)+\sin a]-2\sin(a+x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(a+x)cos\,x-2\sin(a+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(a+x)[\cos x-1]}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(a+x)\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(a+x)(-2)}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\sin a,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$.

16) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$. Обозначим $y=\arcsin x$, тогда $x=\sin y$. Так как при $x\to 0$ $\arcsin x$ стремится к нулю, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{3\sin y}=\frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\frac{2}{3}.$$

17) Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$. Обозначим $\frac{\pi}{2}-x=t$, тогда

$x=\frac{\pi}{2}-t$. При $x\to\frac{\pi}{2}$, $t\to 0$. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}.$$

II. Функция $f(x)$ представляет собой произведение бесконечно малой на бесконечно большую при $x\to a$ или $x\to\infty$, то есть случай $0\cdot\infty$

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2x\cdot ctgx$. Здесь при указанном изменении аргумента имеем случай неопределенности вида $0\cdot\infty$. Делаем следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\pi}\sin 2x\cdot ctgx=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x\cdot\cos x}{\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to\pi}2\cos^2 x=2\cos^2\pi=2\cdot(-1)^2=2$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$. В данном случае при указанном изменении аргумента функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечную большую, то есть неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}=1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

$=1\cdot 1=1.$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin\frac{x-a}{2}\cdot tg\,\frac{\pi x}{2a}\right)$. При указанном изменении аргумента функция представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую, то есть неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю. Обозначая через $x-a=t$, получим $x=t+a$, при $x\to a,\quad t\to 0$

$$\lim_{x\to a}\left(\sin\frac{x-a}{2}\cdot tg\,\frac{\pi x}{2a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\sin\frac{x-a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{2a}}{\cos\frac{\pi x}{2a}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi(t+a)}{2a}}{\cos\frac{\pi(t+a)}{2a}}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi(t+a)}{2a}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(t+a)}{2a})}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi(t+a)}{2a}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2a}-\frac{\pi}{2})}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi(t+a)}{2a}}{\sin(-\frac{\pi t}{2a})}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{\pi(t+a)}{2a}\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{\pi(t+a)}{2a}\cdot(-\frac{\pi t}{2a})}{\sin(-\frac{\pi t}{2a})\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{\pi(t+a)}{2a}\cdot(-\frac{\pi t}{2a})}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{t}{2}\cdot\frac{\pi(t+a)}{2a}}{(-\frac{\pi t}{2a})}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t+a}{-2}=-\frac{a}{2}.$$

III. Случай, когда при $x \to a$, $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет отношение бесконечно большой величины на бесконечно большую величину, то есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^3 - x - 3}$.

Здесь теорему о пределе частного применить нельзя, так как пределы делимого и делителя не существуют, т.е. имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В подобных примерах необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на степень x с наивысшим показателем и затем перейти к пределу.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{5x^3 - x - 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3+0+0}{5+0+0} = \frac{3}{5}.$$

Здесь учитывается, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$.

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^3 - x^2 + 8}$.

В этом случае опять имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Проводим те же операции, что и в предыдущем примере. Необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на степень x с наивысшим показателем (в данном случае этот показатель равен 3) и затем перейти к пределу.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x^3 - x^2 + 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^3}} = \frac{0+0-0}{1-0+0} = 0.$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+7x^3-5x}{4x^3-3x^2+x-2}$.

В этом случае опять имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Проводим те же операции, что и в предыдущем примере. Необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на степень x с наивысшим показателем (в данном случае этот показатель равен 5) и затем перейти к пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+7x^3-5x}{4x^3-3x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}}=\frac{2}{\textit{б.м.}}=\infty.$$

Здесь учитываем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0$.

4) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2+4x+5}$.

При $x\to\infty$ значение $|x|$ неограниченно возрастает, поэтому и числитель, и знаменатель дроби неограниченно увеличиваются, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2+2)=\lim_{x\to\infty}(x^2+4x+5)=\infty.$$

В этом случае говорят, что предел является *неопределённостью вида* $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Так же, как и в рассмотренных выше примерах, ничего определённого о

пределе частного $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ сразу сказать нельзя, если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$.

Чтобы вычислить данный предел (или, как говорят, *раскрыть неопределённость*), разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 - старшую степень аргумента:

$$\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5}=\frac{3+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, то, используя теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{2}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{3}{1}=3.$$

5) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x^2+195}{x^3+1}$.

Этот предел также является неопределённостью вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Чтобы раскрыть её, разделим числитель и знаменатель дроби на x^3 - старшую степень аргумента:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2+195}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{100}{x}+\frac{195}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{100}{x}+\frac{195}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}=\frac{0}{1}=0.$$

6) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+x}{2x^2-5x+7}$.

x^4 - старшая степень аргумента, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+x}{2x^2-5x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0 \text{ при всех } \alpha>0,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3})=1,\quad \lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4})=0.$$

Однако подчеркнём, что знаменатель не равен нулю, а лишь стремится к нему, неограниченно уменьшаясь по абсолютной величине с ростом $|x|$.

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+x}{2x^2-5x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}}=\infty.$$

7) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

Числитель и знаменатель представляют собой сумму n первых членов геометрической прогрессии. Применяя известные формулы S_n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{1+2+3+\ldots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+(2n+1)}{2}\cdot n}{\frac{1+n}{2}\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2n-1)}{1+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+1}=2.$$

Из рассмотренных выше примеров можно сделать следующий вывод: если под знаком предела стоит дробно - рациональная функция и предел числителя и знаменателя равен ∞ при $x\to\infty$, то: а) если степень числителя и знаменателя одинаковы, то такой предел равен отношению коэффициентов при наивысших степенях переменной числителя и знаменателя; б) если степень числителя больше степени знаменателя, то предел при $x\to\infty$ равен ∞; в) если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел дробно–рациональной функции при $x\to\infty$ равен 0, т.е. при вычислении пределов $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$, где $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$,

имеем

$$\lim_{x\to\infty} R(x)=\begin{cases}\infty\ , & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0\ , & n<m.\end{cases} \qquad a_0\neq 0,\quad b_0\neq 0\cdot$$

Это правило верно не только для рационального выражения R(x), но и для отношения иррациональных функций.

Так, не вычисляя предела можно найти ответ, например, для

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+5x^3-x}{3x^4-9x^2+x}=\frac{6}{3}=2,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-x}{3x^4-7x^2+3}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x-6}{x^2-8x+3}=\infty.$$

8) Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

Здесь теорему о пределе частного применить нельзя, так как пределы делимого и делителя не существуют. Наивысшая степень числителя и знаменателя равна 1. Разделим числитель и знаменатель на x перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{x}{x^2}}}{\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{0}}{\sqrt[4]{0+0-1}}=-1.$$

9) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{3x^2+x+5}}$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+3})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x^2+x+5}=\infty.$$

Предел является неопределённостью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. x - старшая степень аргумента данной функции, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{3x^2+x+5}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+x+5}}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

IV. Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет разность двух положительных бесконечно больших величин, то есть неопределенность вида $\infty-\infty$. В этом случае неопределенность $\infty-\infty$ путем преобразований функции переводят в неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$.

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. При непосредственной подстановке предельного значения получается неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем функцию следующим образом:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x+2)}{-(x^2+x+1)}\right)=\frac{1+2}{-(1+1+1)}=-1.$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$. Чтобы избавиться от неопределенности вида $\infty-\infty$, умножим и разделим выражение на $\sqrt{x^2+1}+x$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=0.$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9x-\sqrt{x^2-4}}{x}$. Умножая числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9x-\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(9x-\sqrt{x^2-4}\right)\left(9x+\sqrt{x^2-4}\right)}{x\left(9x+\sqrt{x^2-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(81x^2-x^2+4\right)}{x\left(9x+\sqrt{x^2-4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(80x^2+4\right)}{x\left(9x+\sqrt{x^2-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{80+\frac{4}{x^2}}{\left(9+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}=\frac{80+0}{9+\sqrt{1-0}}=8.$$

V. Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель стремится к бесконечности, то есть неопределенность вида 1^∞.

В этом случае для нахождения предела функции используется *второй замечательный предел*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Если в этом равенстве положить $t = \dfrac{1}{x}$, то получаем: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x} = e$.

В выражении под знаком предела умножим и разделим степень на 5, т.е. сведем ко второму замечательному пределу. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 3\cdot 5} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}\cdot}\right)^{15} = e^{15}.$$

2) Вычислить $\lim\limits_{t\to 0}(1-3t)^{\frac{2}{t}}$.

Здесь проводим операции аналогичные предыдущему примеру.

$$\lim_{t\to 0}(1-3t)^{\frac{21}{t}} = \lim_{t\to 0}(1-3t)^{\frac{2\cdot(-3)}{t\cdot(-3)}} = \lim_{t\to 0}\left((1-3t)^{-\frac{1}{3t}}\right)^{-6} = e^{-6}.$$

3) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

В данном случае предел основания равен единице, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right) = 1$, а показатель неограниченно возрастает при $x\to\infty$. Учитывая, что $\dfrac{2x+3}{2x+1} = 1+\dfrac{2}{2x+1}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{(x+1)\frac{2}{2x+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\frac{2}{2x+1}} = e^1 = e.$$

Здесь учитывается, что предел основания равен *e*.

4) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Аналогично предыдущему случаю, предел основания равен единице, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1$, а показатель неограниченно возрастает при $x\to\infty$, т.е. имеем неопределенность вида 1^∞.

Делением числителя дроби на знаменатель, выделим целую часть:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{x\cdot\frac{8x-3}{x^2-3x+7}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{8x-3}{x^2-3x+7}}=e^8,\text{ так как }\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{8x-3}{x^2-3x+7}=8,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e.$$

5) Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)=\dfrac{1}{2}$, поэтому данный предел неопределённостью не является и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}=0$, а $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}=+\infty$.

(Функция $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ стремится к нулю, если $x\to+\infty$, и неограниченно возрастает, если $x\to-\infty$).

6) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

Предел основания равен единице, а показатель неограниченно возрастает по абсолютной величине. Решаем так:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}}\right)^{\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}{(x-a)\sin a}}=e^c\cdot$$

Здесь учитываем, что

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}}=e^{ctg\,a},\ \text{а}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+2}{2}}{(x-a)\sin a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)\frac{\cos\frac{x+2}{2}}{\sin a}=1\cdot\frac{cos\,a}{\sin a}=ctg\,a\cdot$$

7) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$.

Деля числитель и знаменатель дроби на x и применяя второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{-3}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^2}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-3}}=$$

$$=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5\cdot$$

8) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

Предел числителя и знаменателя равен. Если под знаком предела встречаются показательные или логарифмические функции, то данное выражение целесообразно преобразовать так, чтобы задача сводилась к нахождению известного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\cdot$

Решаем таким образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}(e^{(\alpha-\beta)x}-1)}{x}.$$

Обозначим:

$$e^{(\alpha-\beta)x}-1=z \qquad (1)$$

Определяем отсюда x: $e^{(\alpha-\beta)x} = z+1$,

$$(\alpha-\beta)\ x\ \ln e = \ln(z+1), \qquad x = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln(z+1).$$

Заменим теперь x через z, учитывая, что при $x \to 0$ будет $z \to 0$, это видно из (1).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}(e^{(\alpha-\beta)x}-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta\frac{1}{\alpha-\beta}\ln(1+z)}\cdot z}{\frac{1}{\alpha-\beta}\ln(1+z)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\ln(1+z)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\cdot z}{\frac{1}{\alpha-\beta}\ln(1+z)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\cdot z(\alpha-\beta)}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\cdot(\alpha-\beta)}{\frac{1}{z}\ln(1+z)} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\cdot(\alpha-\beta)}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{(1+0)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}\cdot(\alpha-\beta)}{\ln e} = \frac{(\alpha-\beta)}{1} = \alpha-\beta,$$

так как $\lim\limits_{z\to 0}\ \ln(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$.

9) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x - 1}{x-e}$.

Имеем:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}.$$

Обозначим: $\dfrac{x}{e}-1 = z$. Определим отсюда x: $\dfrac{x}{e} = z+1$, $x = (z+1)\cdot e$. При $x \to e$ будет $z \to 0$.

Заменим теперь x через z, получим:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\ln(1+z)}{e\cdot z}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{1}{z}\ln(1+z)=$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{e}\ln\left(\lim_{x\to e}(1+z)^{\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln e=\frac{1}{e}.$$

10) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Введем новую переменную:

$$a^x-1=t,\ \Rightarrow\quad a^x=t+1.$$

Прологарифмируем последнее равенство по основанию e, тогда получим:

$$\Rightarrow\quad x\ln a=\ln(t+1),\ \Rightarrow\quad x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}.$$

Так как при $x\to 0$ имеем $t\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=$$

$$=\ln\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)=\ln\frac{t}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)}=\ln a\cdot$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\cdot$

10) Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left\{(1+x+x^2)\,(1-x+x^2)\right\}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left((1+x^2)^2-x^2\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left\{(1+x^2+x^4)\right\}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left((1+x^2(1+x^2)\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left((1+x^2(1+x^2)\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left\{\left((1+x^2(1+x^2)\right)^{\frac{1}{x^2(1+x^2)}}\right\}^{1+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x^2)\ln\left((1+x^2(1+x^2)\right)^{\frac{1}{x^2(1+x^2)}}\right\}==\lim_{x\to 0}(1+x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x^2(1+x^2)\right)^{\frac{1}{x^2(1+x^2)}}=$$

$$=(1+0)\cdot\ln e=1$$

З а д а н и е 5. Найти следующие пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{3x^2-x-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)(x^2+x+1)}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$;

12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$;

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$;

14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}$;

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{2x^3-x^2+3x-1}$;

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^4-x^2-1}$;

17. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{18-x^2}-3}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$;

22. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x+1}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

25. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d}\right)$;

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$;

28. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$;

29. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\pi-2x}$;

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$;

31. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2 x}$;

32. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$;

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$;

35. $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,x$;

36. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{a^x-a^c}{x-c}$;

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$;

38. $\lim\limits_{x\to 0} (1+3tg^2 x)^{ctg^2 x}$;

39. $\lim\limits_{m\to \infty} \left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$;

40. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$;

41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$;

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$; 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$; 45. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$ (учесть, что $x^x=e^{\ln x}$);

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$; 47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$;

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}$; 49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$;

50. $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{2a+x}{a+x}\right)$. 51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4+2x^3+3}{3x^6+2x^4+6x+1}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x-1}{4-2x+x^3}$; 53. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2-4}$;

54. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$; 55. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$;

56. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^2+6x+5}$; 57. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

58. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2+3x-2}$; 59. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{1-\sqrt{2+x}}$;

60. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$; 61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x}$;

62. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$; 63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x}$;

64. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7-x}-3}{1-\sqrt{3+x}}$; 65. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; 67. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{2x+6}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{4+x}}$;

68. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

69. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

70. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x-5x^2+1}$;

71. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6+3x^5+4x^3+x}{x^3+97x^2+1}$;

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x+105}{x^4+2x^2+1}$;

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^{40}\cdot(4x+1)^{10}}{(2x^2-3)^{25}}$;

74. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}+5}$;

75. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+1}$;

76. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}}$;

77. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x^3+2x+1}}$;

78. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+3x}+\sqrt[4]{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x+1}}$;

79. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}-5x)$;

80. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$;

81. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

82. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2-1})$.

2.3 Сравнение бесконечно малых

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или просто бесконечно малой) в точке $x=a$ (или при $x\to a$), если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Пример 1. Функция $y=(x-2)^2(x-1)$ - бесконечно мала (б. м.) в точках

$x_1=2$ и $x_2=1$, так как $\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2(x-1)=0$ и $\lim\limits_{x\to1}(x-2)^2(x-1)=0$.

Функция $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ б. м. при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k,\quad k\neq 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые одного и того же порядка. В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными. Это записывают так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Если $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to\infty$, то это означает, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$. Таким образом, $\beta(x)$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$.

3. Если $(\alpha(x))^{\kappa}$ и $\beta(x)$ бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k>0$, то говорят, что бесконечно малая $\beta(x)$ имеет порядок k по сравнению с $\alpha(x)$.

4. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность $\alpha(x)-\beta(x)=\gamma(x)$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Отметим, что если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, т.е. если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=k$.

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых: если $x\to 0$, то $\sin x\sim x$, $tgx\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $arctgx\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\sqrt[m]{1+x}-1\ \sim\ \dfrac{1}{m}x$, $\sqrt{1+x}-1\ \sim\ \dfrac{1}{2}x$.

Пример 2. Функции $\alpha(x)=(x-2)^2(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ - б. м. при $x\to 2$, кроме того, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=1$. Значит, $\alpha(x)\sim\beta(x)$ в точке $x=2$.

Пример 3. Функции $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\beta(x)=\dfrac{3x^2+4}{x^4+3x^2+5}$, $\gamma(x)=\dfrac{1}{x^2}$ - б. м. при $x\to\infty$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^4+3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

При этом $\alpha(x)\sim\gamma(x)$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$.

Однако бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными не являются:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+5}{(x^2+1)(3x^2+4)}=\frac{1}{3}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tg\,x^2}$.

Решение. Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: $\ln(1+3x\sin x) \sim 3x\sin x$, $tgx^2 \sim x^2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tg\, x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(cos\, x)}{arcsin\, x^2}$.

Решение. Заметим, что $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$, поэтому

$$\ln(cos\, x)=\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\sim\left(-2\, sin^2\frac{x}{2}\right)\sim\left(-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right),$$

а $\arcsin x^2 \sim x^2$ при $x\to 0$.

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(cos\, x)}{arcsin\, x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2\cdot x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 6. Сравнить бесконечно малые величины $\ln(1+x)$ и $x\sin\dfrac{1}{x}$ бесконечно малой величиной x .

Решение. Для сравнения этих бесконечно малых возьмем предел их отношения и выясним, чему он равен. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1\cdot$$

Следовательно $\ln(1+x)$ и x - эквивалентные бесконечно малые величины по определение эквивалентных.

Величина $x\sin\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой величиной как произведение бесконечно малой x на ограниченную величину

$\sin\frac{1}{x}$ ($\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$). Так как отношение $\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела, то и величины $x\sin\frac{1}{x}$ и x сравнить нельзя. Они несравнимы.

З а д а н и е 6. Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$.

2.4 . Односторонние пределы

Если область X такова, что в любой близости от *a,* но справа от *a,* найдутся значения *x* из *X*, то можно специализировать данное выше определение предела функции.

Число *A* называют пределом слева (справа) функции в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех *x,* удовлетворяющих условию $x_0-\delta \prec x \prec x_0$ ($x_0 \prec x \prec x_0+\delta$) выполняется неравенство $|f(x)-A| \prec \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$, а также $A = f(x_0-0)$ ($A = f(x_0+0)$).

Графически эти случаи представлены на рис.13.

Для существования предела функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x_0-0) = f(x_0+0).$$

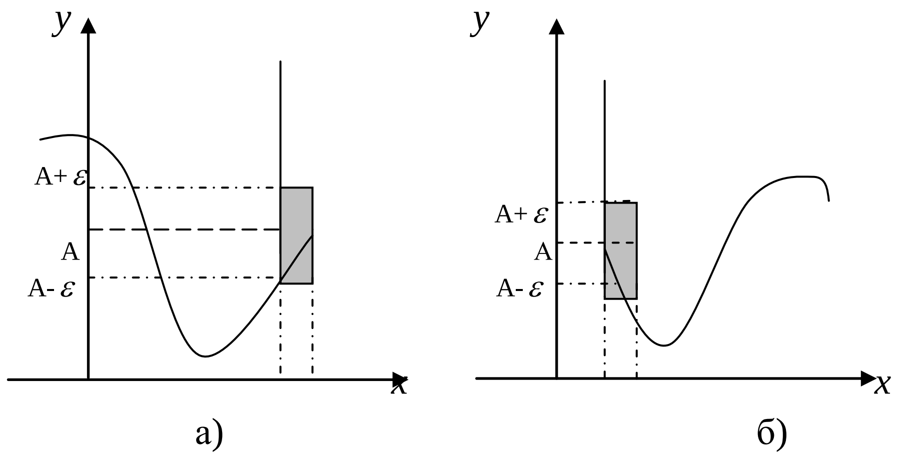


Рис.13

Пример 6. Найти односторонние пределы функций:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$, при $x\to 3$; б) $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$, при $x\to a$.

Р е ш е н и е. а) Если $x\to 3-0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to -\infty$ и $2^{\frac{1}{x-3}}\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=\frac{1}{3}.$$

Если же $x\to 3+0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to +\infty$ и $2^{\frac{1}{x-3}}\to +\infty$ и

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}=0.$$

б) Если $x \to a-0$, то $\dfrac{1}{x-a} \to -\infty$ и

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a-0} e^{\frac{1}{x-a}} = 0.$$

Если же $x \to a+0$, то $\dfrac{1}{x-a} \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = +\infty.$$

III. Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является одним из основных понятий математического анализа.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a (т.е. если существует $f(a)$);

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Пусть приращение аргумента $x-a=\Delta x$, тогда приращение функции будет $f(x)-f(a)=\Delta y$. В этом случае условие непрерывности функции будет следующее: функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to a} \Delta y = 0$.

Очевидно, график функции непрерывной на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, то есть линию, которую можно провести, не отрывая карандаш от бумаги.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке $x=a$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в этой точке (последняя при $g(a)\neq 0$).

Все элементарные функции, то есть такие, которые можно задать одним аналитическим выражением, полученным из простейших элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий и операции составления сложной функции, последовательно применённых конечное число раз, непрерывны на области определения, то есть в каждой точке, в которой определены. К простейшим элементарным функциям относятся степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Функции $y=cos^2 4x$, $y=log_2 \frac{x+1}{x-1}$, $y=\sqrt{x}\cdot arcsin\, x$, $y=\frac{tg\, 2x}{1+tg^2 2x}$ и т.д. - элементарные. Каждая из них непрерывна всюду, где определена.

Теорема. Для того чтобы функция была непрерывна в точке а, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева, т.е.

$$f(a+0)=f(a)=f(a-0)$$

Теорема. Если функция $u=g(x)$ непрерывна в точке а, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=g(a)$, то сложная функция $y=f(g(x))$ непрерывна в точке a.

<u>Определение.</u> Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерыв-

ности функции, т.е. нарушается равенство $f(a+0)=f(a)=f(a-0)$

Различают точки разрыва первого и второго рода.

Определение. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$, причем не все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой, то точка a называется *точкой разрыва первого рода*.

Точки разрыва первого рода подразделяются, в свою очередь, на точки *устранимого разрыва* (в этом случае $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда $f(a-0)\neq f(a+0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в этом случае разность $f(a-0)-f(a+0)$ называется скачком функции в точке а. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва первого рода, называются *точками разрыва второго рода* (когда хотя бы один из односторонних пределов слева или справа равен бесконечности или не существует).

Приведем классификацию точек разрыва функции в виде схемы.

Точки разрыва функции

I рода

(существуют, конечны
оба односторонних предела)

II рода

(хотя бы один из односторонних
пределов равен бесконечности
или вообще не существует)

устранимый
разрыв
(существуют, конечны,
равны между собой оба
односторонних предела,
но не равны значению

конечный
скачок
(существуют, конечны,
но не равны между
собой односторонние
пределы)

Пример 6. Показать, что при x=5 функция $y = \dfrac{x}{x-5}$ имеет разрыв.

Р е ш е н и е. Находим $\lim\limits_{x \to 5-0} \dfrac{x}{x-5} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 5+0} \dfrac{x}{x-5} = +\infty$.
Итак, функция при $x \to 5$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x = 5$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 14).

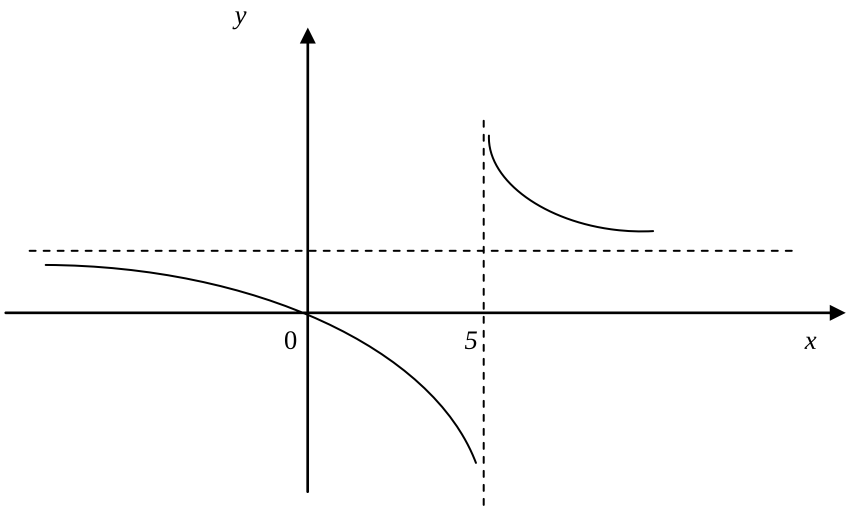


Рис. 14

Пример 7. Показать, что при $x = 6$ функция $y = arctg\,\dfrac{x}{x-6}$ имеет разрыв.

Р е ш е н и е. Если $x \to 6-0$, то $\dfrac{x}{x-6} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 6-0} y = \lim\limits_{x\to 6-0} arctg\,\dfrac{x}{x-6} = -\dfrac{\pi}{2}$. Если же $x \to 6+0$, то $\dfrac{x}{x-6} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 6+0} y = \lim\limits_{x\to 6+0} arctg\,\dfrac{x}{x-6} = \dfrac{\pi}{2}$. Итак, при $x \to 6$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы не равны друг другу. Следовательно, $x = 6$ является точкой разрыва первого рода – точкой скачка (т.е. точка неустранимого разрыва). Скачок функции в этой точке равен $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ (см. рис. 15).

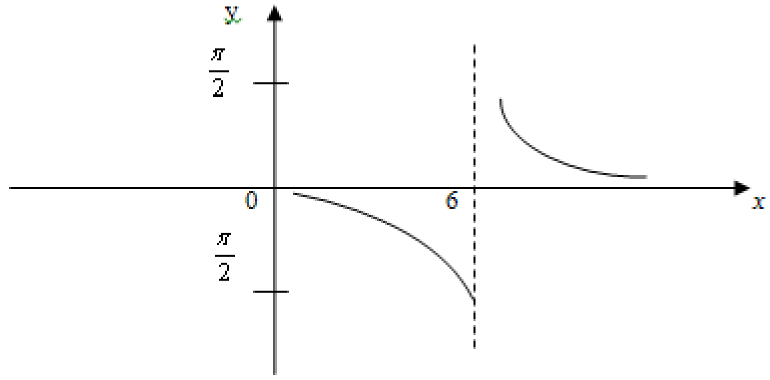


Рис. 15

Пример 8. Показать, что при x =4 функция $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ имеет разрыв.

Р е ш е н и е. В точке x =4 функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. В других точках дробь можно сократить на $x-4\neq 0$. Следовательно, $y=x+4$ при $x\neq 4$. Легко видеть, что $\lim\limits_{x\to 4-0} y=\lim\limits_{x\to 4+0} y=8$.

Итак, при x =4 функция имеет устранимый разрыв, так как пределы слева и справа равны друг другу. Этот разрыв будет устранен, если предположить, что при x =4 значение функции $y=8$.

Таким образом, можно считать, что функция $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ непрерывна при всех значениях *x*, если считать, что равенство $\frac{x^2-16}{x-4}=x+4$ справедливо при всех значениях *x*, не исключая и *x* =4. В этом случае график функции есть прямая $y=x+4$.

Пример 9. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} 3+\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}, & при \quad x\neq 2 \\ 3\dfrac{1}{4}, & при \quad x=2 \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Вычислим правосторонний и левосторонний пределы данной функции при $x\to 2$.

$\lim\limits_{x\to 2-0}\left(3+\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}\right)=3$, так как $\dfrac{1}{2-x}\to+\infty$, и, следовательно, $\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}\to 0$ при $x\to 2-0$.

$\lim\limits_{x\to 2+0}\left(3+\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}\right)=3\dfrac{1}{2}$, так как $\dfrac{1}{2-x}\to-\infty$, и, следовательно, $\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}\to\dfrac{1}{2}$ при $x\to 2+0$.

В точке x=2 функция имеет разрыв первого рода, так как правосторонний и левосторонний пределы данной функции существуют в этой точке, но не равны друг другу.

Пример 10. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}, & при \quad x\neq 0 \\ 0, & при \quad x=0 \end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Видно, что если $1-\dfrac{1}{1+x^2}=0$, т.е. при x=0 данная функция не определена, значит эта точка есть точка разрыва. Определим, какого рода этот разрыв. Для этого найдем правосторонний и левосторонний пределы данной функции.

$$\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}\right)=1, \qquad \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}\right)=1.$$

Итак, правосторонний и левосторонний пределы данной функции равны друг другу, но не равны значению функции в этой точке. Значение функции в этой точке по условию равно 0. Следовательно, точка x=0 является точкой устранимого разрыва первого рода.

Если изменить значение функции в точке x=0, положив $f(0)=1$, то в этой точке функция будет непрерывной.

Пример 11. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}7x+2, & \text{если} \quad x\le 3\\ x^2+3, & \text{если} \quad x>3\end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Единственной точкой разрыва здесь может быть «точка стыка» двух выражений, задающих функцию, т.е. x=3. Мы имеем:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}(7x+2)=23,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(7x+2)=12.$$

Оба предела $f(3-0)$ и $f(3+0)$ существуют, но различны. Следовательно, точка x=3 – точка разрыва первого рода. Величина скачка равна 12-23=-11.

Пример 11. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ определена, а значит, непрерывна всюду, за исключением точки $x=0$. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, но $f(0)=0$, поэтому точка $x=0$ - точка устранимого разрыва. Доопределив функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x=0$ другим образом, полагая $f(x)=1$, устраним разрыв и получим функцию, непрерывную при всех $x\in R$.

Пример 12. Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

Функция не определена при $x=0$. Обозначим $z=\dfrac{1}{x}$, тогда $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{z\to\pm\infty} z$. Этот предел, как было отмечено выше, не существует, поэтому точка $x=0$ является для функции $y=\sin\dfrac{1}{x}$ точкой разрыва II рода.

Пример 13. Исследовать функцию на непрерывность, указать характер точек разрыва и построить график:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\le 0,\\ 2-x, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$$

Решение. Областью определения функции $f(x)$ является множество R всех действительных чисел. На каждом их промежутков $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$ она является элементарной функцией, поэтому будет непрерывной в этих промежутках.

Так как при переходе через точки $x=0$ и $x=2$ функция меняет свое аналитическое выражение, то в этих точках (и только в них) возможны разрывы. Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в этих точках. Для этого найдем односторонние пределы функции в точках $x=0$ и $x=2$ и сравним их со значениями функции в этих точках.

1) если $x=0$, то

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(-x^2+1) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(2-x) = 2$$

$$f(0) = -0^2 + 1 = 1.$$

Значит, функция $f(x)$ в точке $x=0$ слева непрерывна, справа терпит разрыв первого рода (конечный скачок).

2) если $x=2$, то

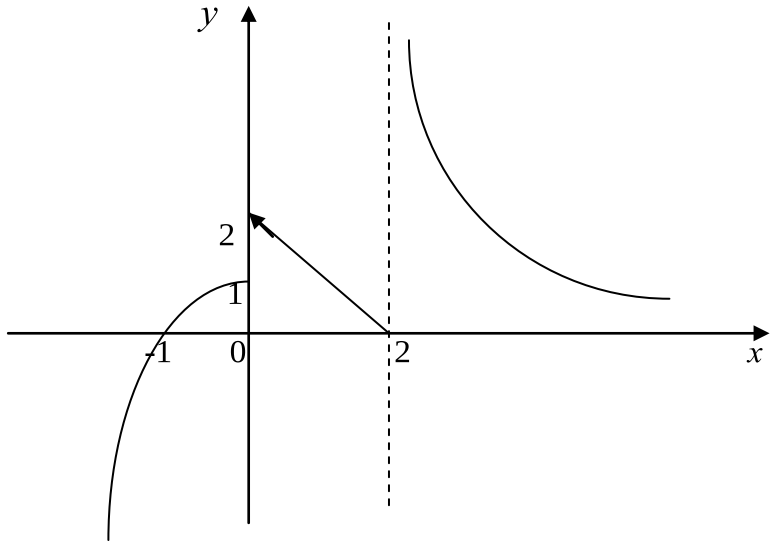
$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(2-x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$f(2) = 2-2 = 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ в точке $x=2$ слева непрерывна, справа терпит разрыв второго рода.

Построим график данной функции.



Задание 6. Исследовать на непрерывность следующие функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{(x-3)(x^2+11)}$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

3) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; 6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & если \quad x\neq 1\\ 2, & если \quad x=1\end{cases}$;

7) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & если \quad x\neq 0\\ 0, & если \quad x=0\end{cases}$; 8) $f(x)=\begin{cases}2x, & если \quad 0\le x<1\\ 3-x, & если \quad 1\le x\le 2\end{cases}$;

9) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \textit{если} \quad x<0 \\ x, & \textit{если} \quad 0\le x\le 1 \\ x^2+4, & \textit{если} \quad x>1 \end{cases}$; 10) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \textit{если} \quad x<0 \\ 1, & \textit{если} \quad x=0 \\ tgx+1, & \textit{если} \quad x>1 \end{cases}$;

11) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \textit{если} \quad x<1 \\ -x^2+2x, & \textit{если} \quad 1\le x<3 \\ 0, & \textit{если} \quad x\ge 3 \end{cases}$;

12) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \textit{если} \quad 0\le x<1 \\ x^2+1, & \textit{если} \quad x>1 \\ x, & \textit{если} \quad x<0 \end{cases}$.

V. Контрольные работы

Вариант I

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+16n^2}{9-n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-8n})$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{8x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x-3}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{7^x-5^x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^2-x}{|x-1|}.$$

Вариант II

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+7}{5-2n+9n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-3}}{3}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{arctg\, x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x+5}{x^2-6x+5}.$$

Вариант III

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{9+n+3n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^2+4n+1}}{2n-1}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cdot\sin 2x)}{1-\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+8}{x^2+1}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{4x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^2-1}{|x|}.$$

Вариант IV

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{1+n^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n})$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x\cdot\arcsin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+1}\right)^{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-1}{x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{2x-1}{2x^2+x}.$$

Вариант V

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+5n^2}{16+3n+n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{3n+4}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)\cdot\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^2-2x-3}{|x+1|}.$$

Вариант VI

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{25+16n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+7}{\sqrt{5n^2+4n+1}}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+18}{x+3}\right)^{x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{\ln(1+x)}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{|x|}{x^2+x}.$$

Вариант VII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n^2}{2+n}-n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+8}}{2n+16}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\sin3x}{1-\cos4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{2}{x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+7x)}{\sin4x^2}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{|x|}{x^2+x}.$$

Вариант VIII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{3n+4}{12n-1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{2}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\pi-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x-2}{x^3+x}.$$

Вариант IX

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-4}{n+3n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\sqrt{3n+4}}{2+\sqrt{3n+4}}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-5x}{x^3-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\ln(1+3x^2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-1}\right)^{3x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin(\pi x)}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x+1}{x^2+4x+3}.$$

Вариант X

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+2n^2}{n+1}-2n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2+3n}}{3}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-1}{\sin 5x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Вариант XI

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2n^2}{5-n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-8}{5\sqrt{n^2+24}}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x-2}{x^2-x}.$$

Вариант XII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+5}{1-n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-4n}}{6}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^2}{5x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{|x-2|}{x^3-2x}.$$

Вариант XIII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8n^2+1}{2+n+n^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+2n+1}}{n-2}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+5x}{1+x}\right)^{\frac{7}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^3}{|x|\cdot(x-1)}.$$

Вариант XIV

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+9}{3+n}-n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2-1}+1}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg\,2x}{1-\cos 4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{|x-3|}{x^2-2x-3}.$$

Вариант XV

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+4n+56}{n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-\sqrt{16n^2+n}}{2}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+3x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x+4}{x^2+2x-8}.$$

Вариант XVI

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n^2+4n}{n^2+16n+24}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+3x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3}{\sin^3 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{|x-1|}{x^2+x-2}.$$

Вариант XVII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-n^2}{n+2}-\dfrac{n^2+2}{n-2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{3n+8}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{6x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 5x}{\ln(1+x^2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+1}\right)^{4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-1}{\arcsin 3x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x}.$$

Вариант XVIII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16n^2+16n+256}{16n^2-256}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+4n}-\sqrt{4n^2+2n}}{2}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}.$$

Вариант IXX

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+45}{n(n+16)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{3n^2+2n}}{4}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\ln^2(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x-10}\right)^{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-3^x}{3^x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{2x^2-x}{|x|\cdot(x-1)}.$$

Вариант XX

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\,(37+7n)}{7n-n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}-8}{n+1}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arcsin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-10}\right)^{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6\cdot 5^x-2}{3\cdot 5^x+1}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{3x+3}{x^2+7x+12}.$$

Вариант XXI

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+3n+4}}{3n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n-\sqrt{16n^2+2})$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{\dfrac{x^2-x-20}{x^2+7x+12}}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{2}{x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2)\cdot\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x+4}{x^2+2x-3}.$$

Вариант XXII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{3n^2+16}{n^2+4}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n^2-1}}{n^2+1}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt[3]{27x^6+3x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{(\pi-2x)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^{x-4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-1}{arctg\,2x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x+2}{x^3-8}.$$

Вариант XXIII

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+16}{n^2+3n-16}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}}{3n-8}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{(x-3)(x^2-2x-3)}}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x^3}{5x^6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin^2 3x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x(x-2)}{x^3-8}.$$

Вариант XXIV

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-5n-7n^{2}}{2+5n+7n^{2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^{2}+n}-\sqrt{9n^{2}-14n}}{5}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2}-x-2}{\sqrt{(x+1)(x^{2}+11x+10}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10\cos 5x}{x\cdot\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{3}+1}{x^{3}-1}\right)^{x^{3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^{2}x)}{1-\cos 3x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x^{3}-1}{x^{2}-2x+1}.$$

Вариант XXV

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^{2}+8n+8}{n^{2}}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-4}{\sqrt{n-2}+4}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^{2}+7x-8}{x^{2}-64}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{1-\cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x^{3}\right)^{\frac{3}{x^{3}}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^{2}}-1}{x\cdot\sin 5x}$.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y=\frac{x\cdot|2x-5|}{2x^{2}-5x}.$$

Вариант 0 (с решением)

1. Найти предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n^2+n-5}{n^2+16}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^2+5n}-\sqrt{16n^2-n}}{6}$.

Решение. а) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(4n^2+n-5)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(4n^2+16)=\infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, поэтому разделим числитель и знаменатель подкоренного выражения на n^2, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+n-5}{n^2+16}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{4n^2+n-5}{n^2}}{\frac{n^2+16}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{16}{n^2}}}=\sqrt{\frac{4}{1}}=2,$$

$$\text{т.к.}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^2}=0.$$

Ответ: 2.

б) Здесь имеем в числителе неопределенность вида $\{\infty-\infty\}$. Чтобы раскрыть ее умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{16n^2+5n}+\sqrt{16n^2-n}\neq 0$ («сопряженное» числителю). Тогда получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+5n}-\sqrt{16n^2-n}}{6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{16n^2+5n}-\sqrt{16n^2-n}\right)\left(\sqrt{16n^2+5n}+\sqrt{16n^2-n}\right)}{6\left(\sqrt{16n^2+5n}+\sqrt{16n^2-n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2+5n-16n^2+n}{6\left(\sqrt{16n^2+5n}+\sqrt{16n^2-n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{6\left(\sqrt{16+\frac{5}{n}}+\sqrt{16-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{1}{4+4}=\frac{1}{8}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

2. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8x^2+5x+6}{x^2+7x+12}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\cdot\arcsin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+7x^3\right)^{\frac{5}{4x^3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{(1+x)^3}-1\right)(x-10)}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}-1\right)(x+9)}$.

Решение.

а) Числитель и знаменатель подкоренного выражения разделим на x^2, тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8x^2+5x+6}{x^2+7x+12}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{8x^2+5x+6}{x^2}}{\frac{x^2+7x+12}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}=\sqrt[3]{8}=2.$$

Ответ: 2.

б) Воспользуемся формулой двойного угла для функции $y=\cos 5x$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\cdot\arcsin 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x\cdot\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{4}\cdot 2\sin^2\frac{5x}{2}}{\frac{25x^2}{4}\cdot x\cdot\arcsin 3x}$$

.

В последнем действии мы умножили числитель и знаменатель на $\frac{25x^2}{4}$, чтобы свети предел к первому замечательному пределу и следствию из него:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cdot}=1,\qquad t=\frac{5x}{2}$$

и $$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\arcsin 3x\cdot}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\arcsin t\cdot}=1,\qquad t=3x.$$

Тогда исходный предел равен:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{4}\cdot 2\sin^2\frac{5x}{2}}{\frac{25x^2}{4}\cdot x\cdot\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{3x}{\arcsin 3x}\cdot\frac{2\cdot 25}{4\cdot 3}\right)=\frac{25}{6}.$$

Ответ: $\frac{25}{6}$.

в) Воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+7x^3\right)^{\frac{5}{4x^3}}=\lim_{x\to 0}\left(1+7x^3\right)^{\frac{1}{7x^3}\cdot\frac{7x^3}{2}\cdot\frac{5}{4x^3}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+7x^3\right)^{\frac{1}{7x^3}\cdot}\right)^{\frac{7x^3}{2}\cdot\frac{5}{4x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x^3}{2}\cdot\frac{5}{4x^3}}=e^{\frac{35}{4}}$$

Ответ: $e^{\frac{35}{4}}$.

г) Воспользуемся свойствами эквивалентных функций: $(1+t)^{\alpha}\sim 1+\alpha t$, при $t\to 0$. Это означает, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}}{1+\alpha t}=1$ и одну функцию в пределе можно заменить другой (эквивалентной).

Поскольку при $x \to 0$, $\sqrt[5]{(1+x)^3} = (1+x)^{\frac{3}{5}} \sim 1 + \frac{3}{5}x$ и $\sqrt[3]{(1+x)^2} = (1+x)^{\frac{2}{3}} \sim 1 + \frac{2}{3}x$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1\right)(x-10)}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1\right)(x+9)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{3}{5}x - 1\right)(x-10)}{\left(1 + \frac{2}{3}x - 1\right)(x+9)} = .$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{5}(x-10)}{\frac{2}{3}(x+9)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 10}{\frac{2}{3} \cdot 9} = 1$$

Ответ: 1.

3. Найти точки разрыва функции и определить характер этих точек разрыва:

$$y = \frac{|x-1|}{x^2(x^2+3x-4)}.$$

Решение. Представим данную функцию в виде:

$$y = \frac{|x-1|}{x^2(x^2+3x-4)} = \frac{|x-1|}{x^2(x-1)(x+4)}$$

И рассмотрим односторонние пределы функции (слева и справа) в особых точках (в которых числитель и знаменатель обращается в ноль): $x = 0$, $x = 1$, $x = -4$.

При $x \to 1-0$ предел рассматривается слева от точки $x = 1$, значит $x < 1$ и $|x-1| = -(x-1)$. Имеем:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{|x-1|}{x^2(x-1)(x+4)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{1-x}{x^2(x-1)(x+4)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-1}{x^2(x+4)} = -\frac{1}{5}.$$

При $x \to 1+0$ предел рассматривается справа от точки $x=1$, значит $x>1$ и $|x-1|=(x-1)$. Имеем:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x^2(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x^2(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2\ (x+4)}=\frac{1}{5}$$

.

Поскольку односторонние пределы конечны, но не равны друг другу, то точка $x=1$ точкой разрыва первого рода.

Рассмотрим теперь односторонние пределы при $x\to 0+0$ и $x\to 0-0$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x-1|}{x^2(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 0-0}\frac{1-x}{x^2(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 0-0}-\frac{1}{x^2\cdot 4}=-\infty.$$

Т.к. этот предел не конечен, то нет смысла рассматривать предел при $x\to 0+0$ поскольку $x=0$ уже является точкой разрыва второго рода.

Наконец, при $x\to -4-0$ предел рассматривается слева от точки $x=-4$, значит $x<-4$ и $(x+4)<0$. Имеем:

$$\lim_{x\to -4-0}\frac{|x-1|}{x^2(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to -4-0}\frac{1-x}{x^2(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to -4-0}\frac{-1}{16(x+4)}=\infty$$

.

Точка $x=-4$ является точкой разрыва второго рода и второй односторонний предел можно не рассматривать.

Ответ: $x=-1$ - точка разрыва первого рода, $x=0$ и $x=-4$ - точки разрыва второго рода.

VI. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

6.1 Производная функции. Правила дифференцирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. *Приращением* этой функции в точке x_0 называется функция аргумента Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Разностное отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ также является функцией аргумента Δx.

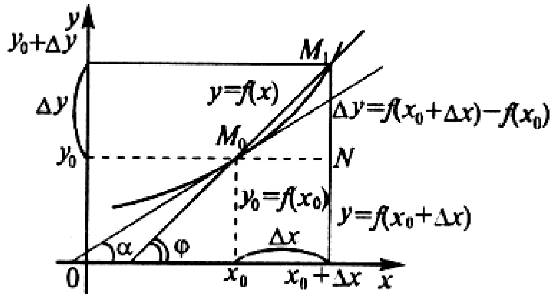
Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

Операция нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в некоторой точке, называют *дифференцируемой в этой точке.*

Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой в этом промежутке.*



Из задачи о касательной вытекает геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 , т.е. $k = f'(x_0)$.

Правила дифференцирования

Теорема. Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x_0, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x)\neq 0$) также имеют производные в точке x_0, причем в точке x_0 справедливы равенства

$$(u+v)' = u'+v', \quad (u-v)' = u'-v', \quad (uv)' = u'v+uv',$$

$$(u\cdot v)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Теорема (производная обратной функции). Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и имеет производную в точке y_0, причем

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема (производная сложной функции). Если функция $t=\varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y=\psi(t)$

имеет в точке $t_0 = \varphi(x_0)$ производную $\psi'(t_0)$, то сложная функция $y = \psi(\varphi(x_0)) \equiv f(x)$ имеет производную в точке x_0, причем

$$f'(x_0) = \psi'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

Таблица производных элементарных функций

1. $C' = 0$,	Для сложных функций эта таблица запишется так:
2. $(x^n)' = n x^{n-1}$, в частности $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$, $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, $(\sqrt{x}) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,	1. $(u^n)' = n x^{n-1} \cdot u'$, в частности $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2u}$,
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, в частности $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x$,	2. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$, в частности $\left(e^u\right)' = e^u \ln e \cdot u' = e^u \cdot u'$,
4. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$,	3. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a}$,
5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$,	4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$,
6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,	5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$,
7. $\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	6. $\left(tg\, u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$,
8. $\left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,	7. $\left(ctg\, u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$,
9. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	8. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,
10. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	9. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$,
	10. $\left(arctg\, u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$,

11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, 12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	11. $\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Примеры. Вычислить производные функций:

№1. $f(x) = x^2 + 3$

Решение. $f'(x) = (x^2+3)' = (x^2)' + 3' = 2x + 0 = 2x$.

№2. $f(x) = x^3 + 1/x + \sqrt{x}$

Решение. $f'(x) = (x^3)' + (1/x)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 - 1/x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

№3. $f(x) = (2x+1)(3x - x^2)$

Решение.

$$f'(x) = ((2x+1)(3x-x^2))' = (2x+1)'(3x-x^2) + (2x+1)(3x-x^2)' =$$

$$= 2(3x-x^2) + (2x+1)(3-2x) = -6x^2 + 10x + 3$$

№4. $f(x) = \dfrac{1+2x}{3-5x}$

Решение.

$$f'(x) = \left(\frac{1+2x}{3-5x}\right)' = \frac{(3-5x)(1+2x)' - (1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2} =$$

$$\frac{(3-5x)2 + 5(1+2x)}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}.$$

№5. $f(x) = \sin(8x - x^3)$

Решение.

$$f'(x)=\cos(8x-x^3)(8x-x^3)' =$$
$$\cos(8x-x^3)(8-3x^2)=(8-3x^2)\cos(8-3x^2).$$

№ 6. $f(x)=\ln(3+x^5)$

Решение.

$$f'(x)=\frac{1}{3+x^5}(3+x^5)' = \frac{1}{3+x^5}(0+5x^4)=\frac{5x^4}{3+x^5}$$

№7. а) $y=x^3-3x^2-\frac{1}{6}x^{-6}+5;$

Реше- ние.

$$y'=\left(x^3-3x^2-\frac{1}{6}x^{-6}+5\right)' = \left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'-\frac{1}{6}\left(x^{-6}\right)'+5'=$$

$$=3x^{3-1}-3\cdot 2x^{2-1}-\frac{1}{6}\cdot(-6)x^{-6-1}+0=3x^2-6x+x^{-7}.$$

№ 8. $y=x^8-\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{x^3};$

Решение.

$$y'=8x^{8-1}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+3\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}-(-3)x^{-3-1}=$$

$$=8x^7-\frac{1}{2\sqrt{x}}+5\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{x^4}.$$

№ 9. $y=\frac{2x^2}{x^2-5};$

Решение.

$$y' = \left(\frac{2x^2}{x^2-5}\right)' = \frac{\left(2x^2\right)'\left(x^2-5\right) - 2x^2\left(x^2-5\right)'}{\left(x^2-5\right)^2} =$$

$$= \frac{4x\left(x^2-5\right) - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2-5\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2-5\right)} - \frac{4x^3}{\left(x^2-5\right)^2}.$$

№ 10. $y = \sqrt[3]{3+x^5};$

Решение. Производную данной функции ищем как производную сложной степенной функции

$$y' = \left(\sqrt[3]{3+x^5}\right)' = \frac{1}{3}\left(3+x^5\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(3+x^5\right)' = \frac{1}{3}\left(3+x^5\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5x^{5-1} = \frac{5x^4}{\sqrt[3]{\left(3+x^5\right)^2}}.$$

№ 11. $y = \left(x^3+7x^2-3\right)\sqrt{2+x^2};$

Решение. Здесь производную находим по правилу производной произведения и применяем и производную сложной функции

$$y' = \left(x^3+7x^2-3\right)'\sqrt{2+x^2} + \left(x^3+7x^2-3\right)\left(\sqrt{2+x^2}\right)' =$$

$$= \left(3x^{3-1} + 7 \cdot 2x^{2-1}\right)\sqrt{2+x^2} + \left(x^3+7x^2-3\right)\frac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}} =$$

$$= \left(3x^2+14x\right)\sqrt{2+x^2} + \left(x^3+7x^2-3\right)\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.$$

№ 12. $y=2\sin(2x^3)$

Решение. По правилу производной сложной функции будем иметь

$$y' = 2\cos(2x^3)\cdot(2x^3)' = 2\cos(2x^3)\cdot 2\cdot 3x^{3-1} =$$

$$= 12x^2\cos(2x^3)$$

№ 13. $y = (3x^3 - 5x^2 + 6)^2$

Решение. Многие студенты сначала возводят в квадрат выражение в скобках, а потом применяют правила дифференцирования. Это долго и трудно. Просто можно воспользоваться правилом дифференцирования сложной степенной функции.

$$y' = 2(3x^3 - 5x^2 + 6)^{2-1}\cdot(3x^3 - 5x^2 + 6)' =$$

$$y' = 2(3x^3 - 5x^2 + 6)^{2-1}\cdot(3\cdot 3x^{3-1} - 5\cdot 2x^{2-1}) =$$

$$= 2x(3x^3 - 5x^2 + 6)\cdot(9x - 10)$$

№ 14. $y = arctg\sqrt{x}$

Решение.

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

№ 15. $y = \sqrt{arctgx}$

Решение.

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

№ 16. $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Решение.

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

№ 17. $y = 3^{2x} \cdot arctg5x$

Решение.

$$y' = (3^{2x})' \cdot arctg5x + 3^{2x} \cdot (arctg5x)' =$$

$$y' = 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot 2 \cdot arctg5x + 3^{2x} \cdot \frac{5}{1+25x^2}$$

№ 18. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x$.

Решение.

$$y' = (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x)' = \frac{1}{4}4x^3 - \frac{1}{3}3x^2 + 2 = x^3 - x^2 + 2.$$

№ 19. $y = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$

Решение.

$$y' = (x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2})' = (x^{3/2} + 2x^{-2})' = \frac{3}{2}x^{1/2} - 4x^{-3} = 1{,}5\sqrt{x} - \frac{4}{x^3}$$

№ 20. $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)'$
$= 2x \ln x + x^2 \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$

№ 21. $y = \sin 3x$

Решение. $y' = (\sin 3x)' = \cos 3x\,(3x)' = 3\cos 3x$.

№ 22. $y = (1+3x)^5$

Решение.

$$y' = ((1+3x)^5)' = 5(1+3x)^4(1+3x)' = 15(1+3x)^4.$$

№ 23. $y = \sqrt{7-x^2}$

Решение. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{7-x^2}}(7-x^2)' = -\dfrac{2x}{2\sqrt{7-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{7-x^2}}$.

№ 24. $y = \ln(2x^2 + 3x - 2)$

Решение.

$$y' = (\ln(2x^2+3x-2))' = \frac{1}{2x^2+3x-2}(2x^2+3x-2)'$$
$$= \frac{4x+3}{2x^2+3x-2}.$$

№ 25. $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$

Решение.

$$y' = (\arcsin\frac{x}{2})' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

№ 26. $y = \cos^2 x^3$

Решение.

$$y' = (\cos^2 x^3)' = 2\cos x^3\,(\cos x^3)' = 2\cos x^3(-\sin x^3)(x^3)'$$
$$= -\sin(2x^3)\,3x^2 = -3x^2\sin(2x^3)$$

№ 27. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

Решение.

$$y' = \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin^2 x)'\cos x - \sin^2 x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x\cos x - \sin^2 x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x(2\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

№ 28. $y = \cos^3\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)$

Решение. Используя формулы производных элементарных функций и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = -3\cos^2\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\sin\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\frac{x}{1+x^2}\,.$$

№ 29. $y = (\arcsin x)^{1/\sqrt{x}}$

Решение. Заданная функция имеет вид $y = u^v$, ее производная определяется по формуле $(u^v) = u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'$.

Поэтому, учитывая, что $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$, получим

$$\left(\left(\arcsin x\right)^{1/\sqrt{x}}\right)' = \left(\arcsin\right)^{1/\sqrt{x}} \cdot$$

$$\ln\left(\arcsin x\right)\cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\arcsin x\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

№ 30. $y = arctg\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$.

Решение. Учитывая, что данная функция является сложной, берем сначала от первого слагаемого как от сложной функция, также и от второго слагаемого как от сложной логарифмической функции, получим

$$y' = \left(arctg\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)\right)' = \left(arctg\frac{x}{a}\right)' + \left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)' + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + a^2}(x^2 + a^2)' =$$

$$= \frac{a^2}{x^2 + a^2}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2 + a^2} = \frac{a}{x^2 + a^2} + \frac{x}{x^2 + a^2} = \frac{a + x}{x^2 + a^2}.$$

6.2 Производная неявной функции

Если функция одной переменной описывается уравнением $y = f(x)$, где переменная y находится в левой части, а правая часть зависит только от аргумента x, то говорят, что функция задана *в явном виде*. Например, следующие функции заданы явно:

$$y = \sin x,\ y = x^2 + 2x + 5,\ y = \ln(\cos x).$$

Во многих задачах, однако, функция может быть задана *неявным образом.* Если функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x; y(x)) = 0$, то говорят, что она задана *неявно***.**

Конечно, любую явную функцию можно записать в неявном виде. Так указанные выше функции можно представить как

$$y-\sin x=0,\ y-x^2-2x-5=0,\ y-\ln(\cos x)=0.$$

Обратное преобразование можно выполнить далеко не всегда. Часто встречаются функции, заданные неявным уравнением, которые невозможно разрешить относительно переменной y. Например, для приведенных ниже функций

$$x^3+y^3-3x^2y^5=0,\quad \frac{x+y}{\sqrt{x^3-y^3}}-4xy^2=0,$$

$$x^3+y^2-2\cos(x+y)=0$$

невозможно получить зависимость $y(x)$ в явном виде.

Для нахождения производной $y'(x)$ неявно заданной функции нет необходимости преобразовывать ее в явную форму. Для этого, зная уравнение $F(x;y(x))=0$, достаточно выполнить следующие действия:

✓ Сначала необходимо продифференцировать обе части уравнения по переменной x, предполагая, что y − это дифференцируемая функция x и используя правило вычисления производной от сложной функции. При этом производная нуля (в правой части) также будет равна нулю. При этом, если правая часть отлична от нуля, т.е. неявное уравнение имеет вид

$f(x)=g(x)$, то дифференцируем левую и правую части уравнения.

✓ Решить полученное уравнение относительно производной $y'(x)$.

Пример 1. Найти производную неявной функции

$$x^2+y^2-a^2=0.$$

Решение. Считаем y функцией, зависящей от x и дифференцируем y как сложную функцию. В результате получим

$$\left(x^2+y^2-a^2\right)'=0,\quad 2x+2y\cdot y'=0,\ y'=-\frac{x}{y}.$$

В этом примере тот же ответ можно было бы получить, если бы данное уравнение решить относительно y:

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Дифференцируя эти функции, получим

$$y' = \pm\frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(a^2 - x^2)' = \pm\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,.$$

Или, если учесть, что $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, получим $y' = \pm\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$. Но переход от неявной функции $F\big(x; y(x)\big) = 0$ к явной $y = f(x)$ не всегда возможен.

Ответ: $y' = -\frac{x}{y}$.

Пример 2. Найти производную функции, заданной уравнением $y^2 = 2px$, где p − параметр.

Решение. Данное уравнение представляет собой *каноническое уравнение параболы*. Дифференцируя левую и правую части по x, получаем:

$$\left(y^2\right)' = \left(2px\right)',\ \Rightarrow\quad 2y\cdot y' = 2p,\ \Rightarrow\quad y' = \frac{p}{y},\quad \text{где } y \neq 0.$$

Пример 3. Продифференцировать функцию $y(x)$, заданную уравнением

$$y = \cos(x + y)\,.$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения по переменной x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(x + y)\,,\ \Rightarrow\quad y' = -\sin(x + y)\cdot(1 + y')\,,$$

$$\Rightarrow\quad y' = -\sin(x + y) - y'\sin(x + y)\,,\ \Rightarrow\quad y'(1 + \sin(x + y)) = -\sin(x + y)\,,$$

Что приводит к результату

$$y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

Пример 4. Найти производную функции, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения по переменной *x*, рассматривая *y* как сложную функцию от *x*:

$$\left(x^3 + y^3\right)' = (3xy)', \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = (3x)' y + 3xy',$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' = 3y + 3xy'.$$

Из последнего уравнения найдем производную:

$$y^2 y' - xy' = y - x^2, \Rightarrow y'(y^2 - x) = y - x^2,$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}, \quad y^2 - x \neq 0.$$

Пример 5. Найти значение производной $y'(x)$ в точке x=0 для функции, заданной уравнением $e^y - xy = e$.

Решение. Дифференцируя обе части данного соотношения, получим

$$\left(e^y - xy\right)' = e', \Rightarrow e^y y' - x'y + xy' = 0, \Rightarrow e^y y' + xy' = y,$$

$$\Rightarrow y'(e^y + x) = y, \Rightarrow y' = \frac{y}{e^y + x}.$$

При x=0, найдем сначала значение y, получим:

$$e^y - 0 \cdot y = e, \Rightarrow e^y = e, \Rightarrow y = 1.$$

Тогда производная при x=0, $y = 1$ будет равна

$$y' = \frac{1}{e^1 + 0} = \frac{1}{e}.$$

Пример 6. Найти значение производной

$$\frac{y}{x} = \ln(xy), \qquad (xy > 0).$$

Решение. Применяем здесь правило дифференцирования неявной функции и правила дифференцирования произведения функций, частного, а также правила дифференцирования сложной функции. В результате получим:

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\ln(xy)\right)', \qquad \Rightarrow \quad \frac{y'x - x'y}{x^2} = \frac{1}{xy}(xy)',$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{xy}(y + xy'), \qquad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = 1 + \frac{x}{y}y' \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad y' - \frac{x}{y}y' = 1 + \frac{y}{x}, \qquad \Rightarrow \quad y'(1 - \frac{x}{y}) = 1 + \frac{y}{x},$$

$$\Rightarrow \quad y'(\frac{y-x}{y}) = \frac{x+y}{x}, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(x+y)y}{x(y-x)}, \text{ где } \ y \neq x.$$

6.3 Логарифмическое дифференцирование

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln f(x))' = f'(x)/f(x).$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют *логарифмическим дифференцированием.* В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной. Например, при нахождении производной функции $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$, предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \quad .$$

Пример 1. Найти производную функции $y=(\sin 2x)^{3x}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y = 3x \ln \sin 2x \ .$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$(\ln y)' = (3x)' \ln \sin 2x + 3x (\ln \sin 2x)' \ .$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = 3\ln \sin 2x + 3x \frac{1}{\sin 2x} 2 \cos 2x \cdot$$

Далее,

$$y' = y(3\ln \sin 2x + 3x \frac{1}{\sin 2x} 2 \cos 2x) =$$

$$= y(3\ln \sin 2x + 6x\, ctg 2x) .$$

Окончательно имеем:

$$y' = (\sin 2x)^{3x} (3\ln \sin 2x + 6x\, ctg 2x) .$$

Пример 2. . Найти производную функции

.
$$y = \frac{(x+2)^2 (x-4)\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^3 (x-4)^5}$$

Решение. Если находить производную данной функции, используя таблицу производных и правила дифференцирования, то процесс будет очень трудоемким. Поэтому в данном примере удобно сначала прологарифмировать его. Прологарифмируем левую и правую части заданной функции:

Применим свойства логарифмов (логарифм произведения и частного). Тогда правая часть запишется

$$\ln y = \ln\frac{(x+2)^2(x-4)\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^3(x-4)^5} =$$

$$= \ln\left[(x+2)^2(x-4)\sqrt{x^2+1}\right] - \ln\left[(x-2)^3(x-4)^5\right] =$$
$$= \ln(x+2)^2 + \ln(x-4) + \ln\sqrt{x^2+1} - \ln(x-2)^3 - \ln(x-4)^5 =$$
$$= 2\ln(x+2) + \ln(x-4) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\ln(x-2) - 5\ln(x-4) =$$
$$= 2\ln(x+2) - 4\ln(x-4) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\ln(x-2).$$

Итак,

$$\ln y = 2\ln(x+2) - 4\ln(x-4) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\ln(x-2).$$

Дифференцируем левую и правую часть последнего равенства, не забывая, что y является функцией переменной x:

$$(\ln y)' = \left(2\ln(x+2) - 4\ln(x-4) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\ln(x-2)\right)'$$
$$\frac{y'}{y} = (2\ln(x+2))' - (4\ln(x-4))' + \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)' -$$
$$-(3\ln(x-2))' = 2(\ln(x+2))' - 4(\ln(x-4))' + \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)\right)' -$$
$$-3(\ln(x-2))' = 2\cdot\frac{1}{x+2}\cdot(x+2)' - 4\cdot\frac{1}{x-4}\cdot(x-4)' +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' - 3\cdot\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)' =$$
$$= \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-4} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x-2}$$

Таким образом, получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-4} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x-2}$$

или

$$y' = y\left(\frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-4} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x-2}\right)$$

Вместо y подставим ее исходное выражение, в итоге получим

$$y' = \frac{(x+2)^2\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^3(x-4)^4}\left(\frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-4} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x-2}\right)$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y(x) = (\sin x)^x$$

Решение. Применим опять логарифмическое дифференцирование

$$\ln y(x) = \ln(\sin x)^x,$$

$$\ln y(x) = x\ln(\sin x).$$

Дифференцируя обе части, будем иметь

$$\left(\ln y(x)\right)' = \left(x\ln(\sin x)\right)'$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x' \cdot \ln\sin x + x(\ln\sin x)' = \ln\sin x + \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x =$$

$$= \ln\sin x + x\cdot ctgx.$$

Таким образом, получим

$$y'(x) = y(x)\left(\ln\sin x + x\cdot ctgx\right) = (\sin x)^x\left(\ln\sin x + x\cdot ctgx\right)$$

Пример 4. Найти производную от функции

$$y = x^x.$$

Решение. Логарифмируя по основанию e, получим

$$\ln y = x\ln x.$$

Теперь берем производные от обеих частей полученного равенства. Имеем

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1.$$

Отсюда находим y':

$$y' = (\ln x + 1)\, y.$$

Подставляя в последнее равенство исходную функцию $y = x^x$, получим $y' = x^x (\ln x + 1)$.

Ответ: $y' = x^x (\ln x + 1)$.

VII. Дифференциал функции

7.1 Основные понятия и теоремы

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$, где A - некоторое число, а α — функция аргумента Δx, бесконечно малая и непрерывная в точке $\Delta x = 0$.

Теорема. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$.

Отметим, что при этом $A = f'(x_0)$.

Определение. *Дифференциалом* (или *первым дифференциалом)* функции $y = f(x)$ в точке x_0 (дифференцируемой в этой точке) называется функция аргумента Δx: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

При $f'(x_0)\neq 0$ дифференциал является главной (линейной относительно Δx) частью приращения функции в точке x_0.

Определение. *Дифференциалом независимой переменной x называется* приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $dy = f'(x_0)dx$, откуда $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

7.2. Правила дифференцирования

Ввиду общности операций нахождения производной и дифференциала обе они носят название дифференцирования.

Пользуясь формулой $dy = f'(x)dx$, можно получить из таблицы формул для производных соответствующую таблицу формул для дифференциалов. Для получения дифференциала нужно умножить производную на дифференциал независимой производной (т.е. на dx).

1. $dC = 0$,
2. $d(x^n) = n x^{n-1}\,dx$, в частности $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(x^3) = 3x^2\,dx$, $d\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$,
3. $d\left(a^x\right) = a^x \ln a\,dx$, в частности $d\left(e^x\right) = e^x\,dx$,
4. $d\left(\log_a x\right) = \dfrac{dx}{x\ln a}$,

5. $d(\sin x) = \cos x\,dx$,

6. $d(\cos x) = -\sin x\,dx$,

7. $d(tg\,x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$,

8. $d(ctg\,x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$,

9. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

10. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

11. $d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}$,

12. $d(arcctgx) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

Пример 1. Найти дифференциалы функций

1) $y = x^4$, 2) $y = (2x-1)^4$, 3) $y = \ln x$, 4) $y = \ln(x^2+1)$.

Решение. 1) $dy = 4x^3dx$, 2) $dy = 8(2x-1)^3dx$, 3) $dy = \dfrac{dx}{x}$, 4) $dy = \dfrac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Приращение Δy функции $y = f(x)$ представляется в виде:

$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$,

где функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Так как $\Delta x = dx$, то

$$\Delta y = f'(x)\cdot dx + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x = dy + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x.$$

А так как $\alpha(\Delta x)\cdot \Delta x$ является бесконечно малым, то им можно пренебречь, поэтому

$$\Delta y \approx dy$$

Учитывая, что нахождение дифференциала значительно проще, чем приращение функции, то данная формула активно используется на практике.

Для приближенного вычисления значения функции применяется следующая формула:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x \qquad (*)$$

Пример 1. Вычислить $\sqrt{3{,}9978}$.

Решение. Сначала необходимо составить функцию $f(x)$. По условию необходимо вычислить корень квадратный из числа $\sqrt{3{,}9978}$, поэтому соответствующая функция имеет вид: $f(x)=\sqrt{x}$. Потом необходимо приблизительно найти значение $\sqrt{3{,}9978} \approx \sqrt{4}$. Значит можно данное число представить $\sqrt{3{,}9978} \approx \sqrt{4-0{,}0022}$. Тогда видно, что удобно обозначить $x_0 = 4$, $\Delta x = -0{,}0022$. Тогда имеем:

$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Используя формулу (*) будем иметь

$$\sqrt{3{,}9978} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0{,}0022) = 2 - 0{,}00055 = 1{,}99945\cdot$$

Пример 2. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, вычислить приближенно значение $arctg 1{,}02$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = arctg\, x$. Нам надо вычислить ее значение в точке $x = 1{,}02$. Запишем $x = x_0 + \Delta x$, т.е. $x = 1 + 0{,}02$. Тогда понятно, что $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$. Значения x_0 и Δx надо выбирать так, чтобы в точке x_0 можно было достаточно легко вычислить значение функции и ее производной, а Δx должно быть достаточно мало. Тогда имеем:

$$y(x_0) = y(1) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

Далее найдем производную исследуемой функции в точке x_0. Получим:

Тогда $$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y'(1) = \frac{1}{2}$$

Подставляя найденные значения в (*), получим

$$y(1{,}02) = arctg1{,}02 = y(1+0{,}2) \approx y(1) + y'(1)\cdot\Delta x =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 \approx 0{,}7852 + 0{,}01 = 0{,}7952$$

Ответ: $arctg1{,}02 \approx 0{,}7952$.

Пример 3. Вычислить значение дифференциала функции

$$y = x^3 + 2x,$$

при *x* меняющимся от 1 до 1.1.

Решение. Сначала находим дифференциал данной функции

$$dy = (3x^2 + 2)dx.$$

Подставим в этот дифференциал значения x=1, $dx = \Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$. Тогда получим

$$dy = (3\cdot 1^2 + 2)\cdot 0{,}1 = 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение производных высших порядков.

Если производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную, то эта производная от $f'(x)$ называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции $y=f(x)$ *в* точке x_0 и обозначается одним из следующих символов: $f''(x),\ f^{(2)}(x),\ y''(x), y^{(2)}(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}$.

Третья производная определяется как производная от второй производной и т. д.

Если функция $y=f(x)$ имеет *(n*-1)-ю производную в окрестности точки x_0 и если (*n*-1)-я производная имеет производную в точке x_0, то эта производная называется *n-й производной* (или *производной n-го порядка)* функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f^{(n)}(x)$ или $y^{(n)}(x)$.

Таким образом, производные высших порядков определяются индуктивно по формуле:

$$y^{(n)}(x)=\left[y^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Функция, имеющая *n*-ю производную в точке x_0, называется *n раз дифференцируемой* в этой точке.

Функция, имеющая в точке x_0 производные всех порядков, называется *бесконечно дифференцируемой* в этой точке.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y=x^4+3x^3-x+6$.

Решение. $y'=4x^3+9x^2-1,\quad y''=(y')'=12x^2+18x$.

Пример 2. Найти вторую производную функции $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ в точке $x=1$.

Решение. Найдем сначала первую производную от данной функции

$$y' = \left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot$$

$$y''(1) = -\frac{1}{\sqrt{2^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot$$

Пример 3. Найти производную третьего порядка от функции

$$y = (3x^3 + 2x + 1)\ln x \cdot$$

Решение. Имеем: $y^{(n)}(x) = \left[y^{(n-1)}(x)\right]'$.

$$y' = \left((3x^3+2x+1)\ln x\right)' = (9x^2+2)\ln x + \frac{3x^3+2x+1}{x} =$$

$$= (9x^2+2)\ln x + 3x^2 + 2 + \frac{1}{x} \cdot$$

$$y'' = \left((9x^2+2)\ln x + 3x^2 + 2 + \frac{1}{x}\right)' = 18x\ln x + \frac{9x^2+2}{x} + 6x - \frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(18x\ln x + 9x + \frac{2}{x} + 6x - \frac{1}{x^2}\right)' = 18\ln x + \frac{18x}{x} + 9 - \frac{2}{x^2} + 6 + \frac{2}{x^3} =$$

$$= 18\ln x - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 33$$

.

$$y''' = \frac{18x^3 \ln x + 33x^3 - 2x - 2}{x^3}.$$

Ответ: $y''' = \frac{18x^3 \ln x + 33x^3 - 2x - 2}{x^3}$.

Дифференциалы высших порядков.

Пусть x - независимая переменная и функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

Первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ является функцией двух переменных: x и dx.

Второй дифференциал d^2y функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется как дифференциал функции $dy = f'(x)\,dx$ в точке x_0 при следующих условиях:

1°) dy рассматривается как функция только независимой переменной x (иными словами, при вычислении дифференциала от $f'(x)dx$ нужно вычислить дифференциал от $f'(x)$, рассматривая dx как постоянный множитель);

2°) приращение независимой переменной x при вычислении дифференциала от $f'(x)$ считается равным первоначальному приращению аргумента, т. е. тому же самому значению dx, которое входит множителем в выражение $dy = f'(x)\,dx$.

Пользуясь этим определением, получаем

$$d^2y\big|_{x=x_0} = f''(x_0)(dx)^2.$$

Дифференциал n-го порядка

$$d^ny\big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

Пример 1. Найти дифференциал третьего порядка от функции

$$f(x) = -5x^3 + 8x + 15.$$

Решение. По формуле $d^3y = f'''(x)\,dx^3$ будем искать третью производную данной функции:

$$f'(x) = \left(-5x^3 + 8x + 15\right)' = -15x^2 + 8,$$

$$f''(x) = \left(-15x^2 + 8\right)' = -30x,$$

$$f'''(x) = \left(-30x\right)' = -30.$$

Тогда получим

$$d^3y = -30\,dx^3.$$

Ответ: $d^3y = -30\,dx^3$.

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема 1 (теорема Ферма). Если дифференцируемая на промежутке Х функция $y = f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна 0, т.е. $f'(x) = 0$.

Доказательство. Допустим, что в точке с функция $f(x)$ достигает наибольшего значения. Придадим значению с достаточно малое приращение Δx. Тогда $f(c + \Delta x) < f(c)$. Тогда при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \geq 0. \qquad (*)$$

При $\Delta x > 0$ $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0,$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \le 0. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) следует, что $f'(c)=0$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1°) $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$;

2°) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a,b);

3°) принимает на концах интервала равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.

Тогда существует точка c∈(a, b) такая, что $f(c) = 0$.

<u>*Геометрическая интерпретация теоремы Ролля:*</u>

Существует точка c ∈ (a, b) такая, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке (c, *f*(c)) параллельна оси О*x*.

Теорема 3 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1°) $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$;

2°) $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b).

Тогда существует точка c ∈ (a, b) такая, что

$$f(b) - f(a) = f(c)(b-a). \qquad (1)$$

Замечание. формула (1) называется формулой Лагранжа (или формулой конечных приращений).

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа:

Формула Лагранжа показывает, что касательная к графику в некоторой точке $(c, f(c))$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней).

Правило Лопиталя.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a (кроме, быть может, самой точки a);

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

3) $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки а (кроме, быть может, самой точки a);

4) существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и он равен $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, т.е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на полупрямой $(a, +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$;

4) существует $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, и он равен $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Эти теоремы позволяют раскрывать неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если выполнены условия 1), 3), 4) указанных теорем, а вместо условия 2) выполнено условие $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ *(a-число или символ* $+\infty$), то *существует* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и он равен $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Эти теоремы позволяют раскрывать неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Каждая из указанных выше теорем называется *правилом Лопиталя.* Неопределенности других типов ($0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; 0^{0}; ∞^{0}) можно свести к неопределенностям типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью тождественных преобразований и затем применять правило Лопиталя

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2^x-1\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x}=\ln 2.$$

Пример 2. Пользуясь правилом Лопиталя, найти

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'}{\left(\cos 3x-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)\left(-3\sin 3x+e^{-x}\right)}=0$$

б) Имеем неопределенность вида 1^{∞} воспользуемся формулой $u^{v}=e^{v\ln u}$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} u^{v}=e^{A}$, где $A=\lim\limits_{x\to x_0}(v\ln u)$. Вычислим

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{2}{\pi}arctgx\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{\left(1+x^2\right)arctgx}=-\frac{2}{\pi}$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Решение. При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $\{\infty-\infty\}$. Раскроем эту неопределенность. Приведем ее к виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Применим правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$$

Здесь мы применили правило Лопиталя два раза.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left((x-\sin x)\ln x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left((x-\sin x)\ln x\right)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x-\sin x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$$

Теперь применим правило Лопиталя несколько раз, получим

$$\lim_{x\to 0}\left((x-\sin x)\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x-\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1`}{x}}{\frac{-(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)^2}{x(\cos x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\sin x)(1-\cos x)}{\cos x-1-x\sin x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2+(x-\sin x)\sin x}{-\sin x-\sin x-x\cos x}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+x\sin x-\sin^2 x}{-2\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+x\sin x+\cos 2x}{-2\sin x-x\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\sin x+x\cos x-2\sin 2x}{-3\cos x+x\sin x}=0\cdot$$

Ответ: 0.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$.

Решение. В этом примере мы имеем неопределенность вида $\{0^0\}$. Используем в данном случае тождество

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\ln[f(x)]^{\varphi(x)}}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}.$$

В нашем случае получим

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}=\lim_{x\to 1}e^{\ln(x-1)^{\ln x}}=\lim_{x\to 1}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)}.$$

Вычислим отдельно $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$. Это неопределенность вида $\{0\cdot\infty\}$. Раскроем ее. Тогда получим

$$\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x(\ln x)^2}{x-1}==\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2+x^2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\left[(\ln x)^2+2\ln x\right]=0\cdot$$

Тогда исходный предел будет равен

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}=\lim_{x\to 1}e^{\ln(x-1)^{\ln x}}=\lim_{x\to 1}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}.$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^{0}=1$$

Ответ: 1.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

Решение. В этом примере при $x\to\infty$ имеем неопределенность вида $\{\infty^0\}$. Применим опять тождество

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\ln[f(x)]^{\varphi(x)}}=e^{\varphi(x)\ln f(x)},$$

а также правило Лопиталя, в итоге получим

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^{0}=1.$$

Ответ: 1.

Упражнения для самостоятельной работы.

Задание №1. Найти производные следующих функций:

1). $y = x^2(2x-1)$ Ответ: $y' = 6x^2 - 2x$

2). $y = (x-1)\sqrt{x}$ Ответ: $y' = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

3). $y = \dfrac{5x}{(5-2x)^3}$ Ответ: $y' = \dfrac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}$

4). $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$ Ответ: $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$

5). $y = \cos^2\dfrac{x}{2}$ Ответ: $y' = -\dfrac{\sin x}{2}$

6). $y = x^2\cos x$ Ответ: $y' = x(2\cos x - x\sin x)$

7). $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ Ответ: $y' = \dfrac{1}{1-\sin x}$

8). $y = arctg\,\dfrac{3}{2}x$ Ответ: $y' = \dfrac{6}{4+9x^2}$

9). $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{x}{x+5}}$ Ответ: $y' = \dfrac{1}{x^2+5x}$

10). $y = \arcsin\dfrac{x-2}{3} + ctg3$ Ответ: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Задание №2. Пользуясь правилом Лопиталя, найти:

1) $a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right);$ $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$

2) $a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\pi - 2arctgx)\ln x;$ $b)\ \lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$

3) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$

4) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2}\cdot e^{\frac{1}{x^{2}}}\right)$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$

5) $a)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$

6) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x}-3^{x}}{x\cdot\sqrt{1-x^{2}}}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

7) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^{2}5x}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg\,2x}$

8) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^{3}}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^{2}x}$

9) $a)\ \lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctgx)$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{1/x}$

10) $a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$

Задание № 3. Выберите правильный вариант ответа

1. Найти точки разрыва функции f(x) и определить их тип, если

$$f(x)=\begin{cases}-x^{2}+1, x\le 0,\\ 2-x, x>0.\end{cases}$$

А) в точке x=0 разрыв I рода (конечный скачок);
Б) в точке x=0 разрыв I рода (устранимый разрыв);
В) в точке x=0 разрыв II рода;
Г) в точке x=0 функция непрерывна.

2. Найти точки разрыва функции f(x) и определить их тип, если

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x\le 2,\\ -x+4, x>2.\end{cases}$$

А) в точке x=2 разрыв I рода (конечный скачок);
Б) в точке x=2 разрыв I рода (устранимый разрыв);
В) в точке x=2 разрыв II рода;
Г) в точке x=2 функция непрерывна.

3. Найти точки разрыва функции f(x) и определить их тип, если

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, x>2.\end{cases}$$

А) в точке x=2 разрыв I рода (конечный скачок);
Б) в точке x=2 разрыв I рода (устранимый разрыв);
В) в точке x=2 разрыв II рода;
Г) в точке x=2 функция непрерывна.

4. Найти точки разрыва функции f(x) и определить их тип, если

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, x<-1,\\ x^2, x\ge -1.\end{cases}$$

А) в точке x=-1 разрыв I рода (конечный скачок);
Б) в точке x=-1 разрыв I рода (устранимый разрыв);
В) в точке x=-1 разрыв II рода;
Г) в точке x=-1 функция непрерывна.

5. Найти точки разрыва функции f(x) и определить их тип , если

$$f(x)=\begin{cases}2-x, x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, x>2.\end{cases}$$

А) в точке x=2 разрыв I рода (конечный скачок);

Б) в точке x=2 разрыв I рода (устранимый разрыв);
В) в точке x=2 разрыв II рода;
Г) в точке x=2 функция непрерывна.

6. Вычислить предел функции $f(x)=4^{\frac{1}{tgx}}$ слева в точке $x=0$

А) 1
Б) 0
В) ∞
Г) $\frac{1}{4}$

7. Вычислить предел функции $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ справа в точке $x=0$

А) 1
Б) 0
В) ∞
Г) $\frac{1}{2}$

8. Вычислить предел функции $f(x)=2^{\frac{1}{3-x}}$ справа в точке $x=3$

А) 1
Б) 0
В) ∞
Г) не существует

9. Вычислить предел функции $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ слева в точке $x=1$

А) не существует
Б) 1
В) 0
Г) ∞

10. Вычислить предел функции $f(x)=e^{\frac{1}{tgx}}$ справа в точке $x=0$

А) не существует
Б) 1
В) 0
Г) ∞

11. Найти производную $f'(x)$ **функции f(x) и вычислить ее значение** $f'(x_0)$ **в точке** x_0**, если** $f(x)=e^x(\cos x+\sin x)$**,** $x_0=0$

А) 4;
Б) –1;
В) 0;
Г) 2.

12. Найти производную $f'(x)$ **функции f(x) и вычислить ее значение** $f'(x_0)$ **в точке** x_0**, если** $f(x)=\cos(3x^2-1)+\sqrt{1+x^2}$, $x_0=0$

А) 1;
Б) 0;
В) 7;
Г) 2.

13. Найти производную $f'(x)$ **функции f(x) и вычислить ее значение** $f'(x_0)$ **в точке** x_0**, если** $f(x)=x\sin(x^2+1)$**,** $x_0=0$

А) $\sin 1$;
Б) –1;
В) 0;
Г) $\cos 3$.

14. Найти производную $f'(x)$ функции f(x) и вычислить ее значение $f'(x_0)$ в точке x_0, если $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, $x_0 = 1$

А) $3e$;
Б) 0;
В) $6e$;
Г) 6.

15. Найти производную $f'(x)$ функции f(x) и вычислить ее значение $f'(x_0)$ в точке x_0, если $f(x) = 2^x \cdot e^x$, $x_0 = 1$

А) $3e(4 + \ln 3)$;
Б) $-4\ln 4$;
В) -2;
Г) $2e(\ln 2 + 1)$.

16. Найдите сумму корней уравнения $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 15x + 4$$

А) -2;
Б) 2;
В) -4;
Г) 14.

17. Найдите сумму корней уравнения $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 12x + 5$$

А)1;
Б) -1;
В)4;
Г)-4.

18. Найдите сумму корней уравнения $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x^2 - 6x + 3$$

А) -4;
Б) 4;
В) 2;
Г) -1

19.. Найдите сумму корней уравнения $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - 3x^2 - 14x + 3$$

А) -3;
Б) 7;
В) -12;
Г) 12.

20. Найдите сумму корней уравнения $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$$

А) -6;
Б) 5;
В) 6;
Г) -5

21. Найдите число обратное значению тангенса угла наклона касательной к графику функции: $y = 2x^3 - x^2$ в точке $x_0 = 2$

А) $\frac{1}{20}$;
Б) 20;
В) 28;
Г) $\frac{1}{6}$.

22. Найдите число обратное значению тангенса угла наклона касательной к графику функции: $y = x^2 - 3x^3$ в точке $x_0 = 1$

А) $-\frac{1}{9}$;

Б) -7;

В) 2;

Г) $-\frac{1}{7}$.

23. Найдите число обратное значению тангенса угла наклона касательной к графику функции: $y = x^3 + 2x^2 - 4$ в точке $x_0 = -2$

А) -2;

Б) $\frac{1}{4}$;

В) 4;

Г) $\frac{1}{2}$.

24. Найдите число обратное значению тангенса угла наклона касательной к графику функции: $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ в точке $x_0 = 0$

А) $-\frac{1}{4}$;

Б) 2;

В) -4;

Г) $\frac{1}{4}$;

25. Найдите число обратное значению тангенса угла наклона касательной к графику функции: $y = 2 - 3x + 4x^3$ в точке $x_0 = 1$

А) $-\frac{1}{4}$;

Б) 3;

В) $\frac{1}{9}$;

Г) 9.

26. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 6x + 8$ **в точке** $x_0 = -2$

А) $y = 2x - 6$;

Б) $y = 10x + 12$;

В) $y = 4x + 6$;

Г) $y = -10x + 8$.

27. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x - 2x^2 - 1$ **в точке** $x_0 = 1$

А) $y = -3x - 6$;

Б) $y = -3x - 2$;

В) $y = -3x + 2$;

Г) $y = -3x - 4$.

28. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2 + 2$ **в точке** $x_0 = -1$

А) $y = 4x + 3$;

Б) $y = 4x + 5$;

В) $y = 3x + 4$;

Г) $y = -4x - 3$.

29. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 4x + 2$ **в точке** $x_0 = -1$

А) $y = -2x - 3$;

Б) $y = 2x - 1$;

В) $y = -2x + 3$;

Г) $y = 2x + 3$.

30. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x$ **в точке** $x_0 = 2$

А) $y = 5x - 3$;

Б) $y = 5x - 11$;

В) $y = -5x + 8$;

Г) $y = 5x - 8$.

31. Вычислить предел (пользуясь правилом Лопиталя) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x}$

А) 0;
Б) 2;
В) 1;
Г) $\dfrac{1}{2}$.

32. Вычислить предел (пользуясь правилом Лопиталя) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - arctgx}{x^3}$

А) 17;
Б) 3;
В) 0;
Г) $\dfrac{1}{3}$.

33. Вычислить предел (пользуясь правилом Лопиталя) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

А) 0;
Б) 2;
В) $\frac{1}{2}$;
Г) $\frac{1}{4}$.

34. Вычислить предел (пользуясь правилом Лопиталя) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

А) $\frac{1}{6}$;
Б) 1;
В) 12;
Г) 6.

35. Вычислить предел (пользуясь правилом Лопиталя) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$

А) 1;
Б) $\sqrt{3}$;
В) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
Г) 0.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2003
2. Кудрявцев Л.Д . Курс математического анализа, т. I, II – М.: Наука, 1981
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. - М.: Наука, 1987
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: Дрофа, 1999.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. -М.: Наука, 1990.
6. Берман Г.П. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 2005
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1, 2. -М.: Наука, 202
8. Камынин Л.И. Курс математического анализа, т.1., т.2. - М.: МГУ, 2001
9. Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С. Математический анализ. Введение в анализ. - М.: Просвещение, 1973
10. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. - М.. ЮНИТИ, 2004
11. Погорелов А.И. Сборник задач по высшей и элементарной математике. - М.: Уч. пед из., 1948
12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. –М: ОНИКС 21век, 2003
13. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1985. – 469. с.
14. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин – М.: Высшая школа, 1984. – 199 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968. – Т.1. – 440 с.

Ф.А. БОСТАНОВА, З.М. ЛАЙПАНОВА,
З.К. ДЖАУБАЕВА, М.А. МАМЧУЕВ А.М.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ**

Учебное пособие

План университета 2016

Редактор	Н.В. Ефрюкова
Корректор	Е.М. Плуговая
Компьютерный набор	Ф.А. Бостанова
Компьютерная верстка	С. А. Бостанова

Подписано в печать
Формат 60х84/16
Бумага газетная
Объем: 8,4 физ. печ. л., 8,2 усл. печ. л.,
8,1 уч. изд. л.
Тираж 100 экз.

**Издательство Карачаево-Черкесского
государственного университета имени У.Д. Алиева
369202 г. Карачаевск, ул. Ленина, 29.
Лицензия ЛР №040310 от 21.10.1997**

**Отпечатано в типографии Карачаево-Черкесского
государственного университета имени У.Д. Алиева
369202, г. Карачаевск, ул. Ленина, 46.**